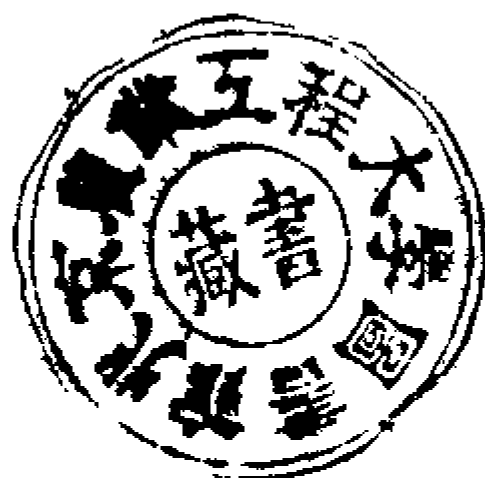
证明四色定理的新数学

——图论中的锁阵运筹

敢　峰　著



北京科学技术出版社

（京）新登字207号

证明四色定理的新数学
——图论中的锁阵运筹
敢 峰 著
●
北京科学技术出版社出版
（北京西直门南大街16号）
邮政编码 100035

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销
建华印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 5.75印张 149千字
1994年6月第一版 1994年6月第一次印刷
印数1—500册

ISBN7-5304-1586-7/N·058 定价：5.60元

内 容 简 介

四色问题或称四色猜想。该问题的证明求解属世界上著名数学难题之一。1879年曾有人首次提出求解证明，但被数学界所否定。百余年来世界上许多数学家为此倾注精力，但始终未得分晓。作者从1979年开始倾心钻研四色问题求证，借助欧拉定理、拓扑和数学归纳法等数学理论工具，在希伍德证明五色定理的基础上，大胆探索研究，提出链阵运算理论，试图解开百年来这一数学难题。现出版这本专著以供数学界品评鉴定，意在推动数学的发展，为丰富我国的数学科学或分支，开辟数学研究新领域，促成学术研究的飞跃进步。

前 言

著名的四色问题，或称四色猜想，最初是英国的一位地图绘制员弗朗塞斯·古斯里（Franeís Guthrie）于1850年提出来的。其立题是：绘制任何一张地图，最多只需要填上四种颜色就可以将彼此相邻（有一段公共的边界线，而不仅仅只有一个公共点）的各个区域互相区别开来。这个问题，在开始一段时间并未引起数学界的的重视，谁知到后来，对这个问题的证明竟成为世界上最著名的数学难题之一，甚至跻身于世界三大数学难题之列。1879年肯泊（Kempe，一位可敬的律师）作出了第一个证明，1890年被数学家希伍德（Heawood）否定了。希伍德证明了五色定理，其后四十年他试图证明四色定理，没有成功。近百年来，世界上许多数学家，还有一些被四色问题迷住的非数学界人士（包括文学家），耗费毕生精力用各种方法希图攻克这个难关，均未如愿。一些宣称证明了四色定理的证明，也都是不成功的，尽管如此，他们都作出了自己的贡献，推动了组合拓扑学和图论的发展。有些数学家还对一些特殊情形和40个区域以内的图形作出了证明。直到1976年，美国的数学家们借助电子计算机（运行1200多小时），宣称证明了四色定理 轰动了世界数学界，但亦未能得到数学界的一致承认。据知，目前数学界一种较普遍的看法是，如果没有新数学，四色定理大概是证明不了的。鉴于此，数学界有人把四色问题比喻为一种瘟疫，认为可改名“四色病”，迷上了它。“虽然还没有致死的记录，但已经知道它会使人痛苦非凡”。当前真正下功夫研究它的人，已寥若晨星了。

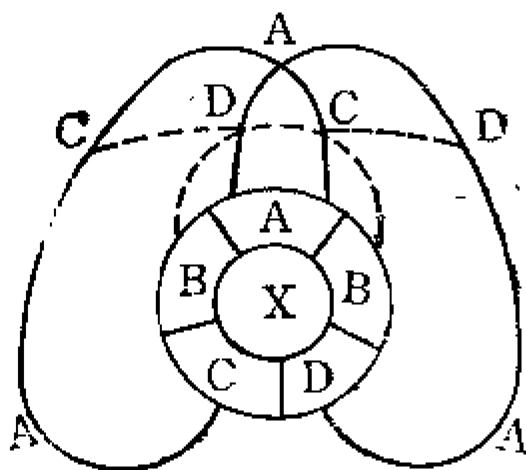
我是从1979年开始钻研四色问题的（回想起来当时的确幼稚可爱，不怕天高地厚）。我的自我感觉是，开始好像是走进桃花源，被它奇特的景色迷住，接着就像掉进了无底陷阱（或者说是“黑洞”），但又仿佛前面总有点亮光忽隐忽现，像是在戏弄我，

又像是鼓励我在黑暗中摸索前行。我问苍天，它究竟是“四色”仙子，还是“四色”妖魔？苍天不应。我明白了：你捉住了它，它就是仙子；你捉不住它，它就是妖魔。岂独四色问题，自然界的万事万物都是这样。对人类来说，仙子和妖魔的界线盖在于此。瘟疫也罢，陷阱也罢，妖魔也罢，或者说我自不量力也罢，“癞蛤蟆想吃天鹅肉”也罢，我毅然决然朝着闪烁亮光的地方走去。

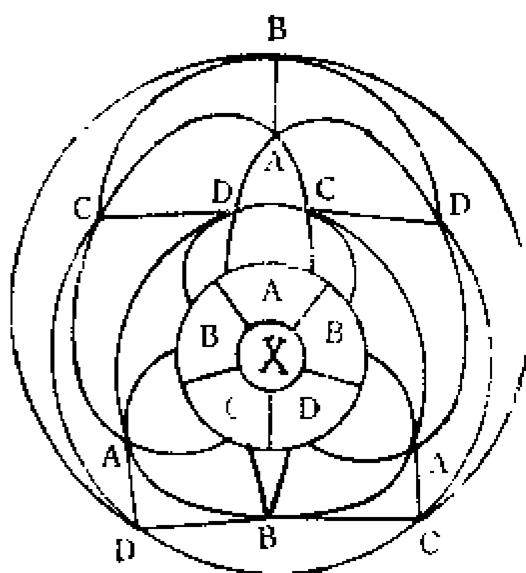
在我眼前，陷阱和黑暗终于消失了。现在要请教数学界专家们的是，我捉住的这位仙子是不是就是那个“四色”妖魔；抑或，我抓住了它的腰带，它正在挣扎着脱身，以便布下更险恶的迷阵在等待我？

“四色”妖魔的藏身窟，前人借助欧拉（Euler）所发现的平面图的欧拉公式（$V-E+F=2$）已经抓明了，困难的问题是怎样设法把它捉住。“吃一堑，长一智”。鉴于已往的经验教训，这次我捕捉“四色”妖魔确是绞尽脑汁，施展谋略，布下了天罗地网的。在数学的图论中，我称之为“锁阵运筹”，即证明四色定理的三阶递进程序和全方位连锁可控调整工程，也许就是证明四色定理的新数学吧。捕捉“四色”妖魔要有“缚魔索”，“缚魔索”就是二色通道。希伍德就是用这样一根“缚魔索”将“五色”妖魔捉住的。但是，对于“四色”妖魔则远远不行了，它有“隐身法”和“分身术”，东窜西跳同你捉迷藏，当你花费很大力气捉住这一个，却又在别处冒出了另一个，怎么也捉不尽，穷举法在这里是毫无用处的。因此要用二色通道的“缚魔索”布下一个全方位连锁可控调整的锁阵，形成一整套锁阵运筹的理论和方法，在锁阵运筹过程中不断排除四色可解，最后将“四色”妖魔团团围困起来，使它完全陷于孤立，什么“隐身法”和“分身术”在这里全无用武之地，从面俯首就擒。这就是：首先排除一阶四色可解，找到一阶四色不可解线路基准图M及其复式图P；然后通过全方位连锁有序的可控换色调整排除二阶四色可解，找到二阶四色不可解线路集合基准图N及复式图R_1，还有

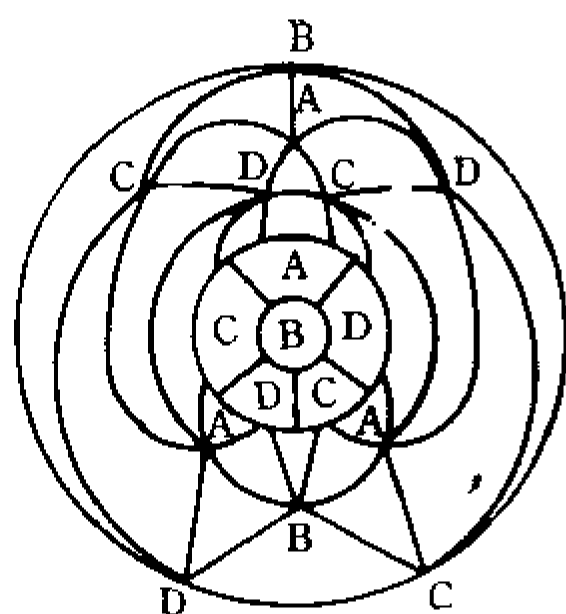
一阶图P的二阶图R_2和R_2R_1，最后在由“缚魔索”形成的二阶四色不可解线路集合的“天罗地网”中，达到三阶最后四色可解，将“四色”妖魔死死缚住。如果用一个公式来表达，即：一阶四色可解＋二阶四色可解＋三阶四色可解＝全部四色可解。



（一阶四色不可解线路基准图M。图中A.B.C.D为四色，X为待填色区）



（二阶四色不可解线路集合基准图N）



（三阶最后四色可解）

至于在实际演绎过程中，由n组两条二色通道交叉粘连所引起并最后形成的二阶四色不可解线路集合图R_1和R_2和R_2R_1，一定在交叉粘连部位有n条二色通道的束所形成的“桥”。因此，可变交叉粘连为非交叉粘连或与二阶四色不可解线路集合基准图N等价，三阶最后四色可解的证明方法也相同。

令人饶有兴味的是：走否定四色定理成立的航道，不断排除四色可解，却最终达到了证明四色定理成立的彼岸。最后找到的赖以否定四色定理的二阶四色不可解线路集合图，恰恰是最后证明四色定理成立的终极图。

在证明四色定理的整个过程中，需要借助欧拉定理、拓扑和数学归纳法。这是数学武库中已有的武器。希伍德在这个基础上第一次创造性地用一条二色通道证明了五色定理。这是前人的功劳。可惜的是，当时未能形成二色通道这样一个极为重要的基本概念，更没有进而由此在图论中形成新的数学分支——锁阵运筹，以致最初的开拓停止于四色问题的峰巅之前。我的微薄贡献（如果可以称为“贡献”的话）乃在于，以希伍德证明五色定理（这是数学界公认的）的启示为起点，全面而系统地发挥各种二色通道的作用，建立起四色演绎图C的网络体系和运用二色圈可控调整的机制，创造了锁阵运筹的理论、思路和方法，通过极为艰难和极为严格的连锁有序的四色演绎，一步一步开拓了证明四色定理的攀顶之路，并最后摘取了这颗明珠。

我极不希望我的这个证明，如石沉大海。肯定也好，否定也

好，半肯定半否定也好，通过质疑进一步研究也好，我都高兴。我知道，事到如今，对四色定理的证明谁也不便轻易肯定，取得数学界的公认更不容易；同样，要否定我的这个证明大概也不是一件容易的事，至少要花相当的功夫。特别是，我不是数学家，而是误入“白虎堂”的门外汉，更增加了这个证明石沉大海的可能性。因为，名震世界的数学难题与数学的门外汉，这两者之间的距离实在太大了。加以数学界的专家们都很忙，各有各的研究领域，涉足四色问题的又很少，这些都是客观上的困难。不过我想暂且不管这个证明能否成立和得到数学界的公认，在图论中我毕竟是在探索一条新路，在开拓一个新的领域．因而也自有它的学术价值，它的贡献。对这一点，大家在看了全书以后，大概会认同的。

在这里，还有一个问题，究竟研究四色定理有什么价值，何必在证明这个难题上花费那么大的功夫。我想，第一，无论解决任何一个数学难题、在这个过程中都必将推动数学的发展，以至可能导致新的数学门类和分支的创立，从数学发展史上足以说明这一点。第二，解决难题，是数学领域（或智力领域）最高层次的奥林匹克运动，是向人类智力极限的冲击和扩展。第三，对数学在实际运用中的价值不宜抱有短视和狭隘的眼光。数学的发展和新数学的出现，在实际运用上的价值是有层次性的，而且往往要随着时间的推移和科学的进步才能逐步看得清楚。目前暂时没有实际运用价值的数学武器，说不定将来在什么时候和什么领域中可能发生意想不到的重大作用。第四，证明四色定理，难在思路和方法，也贵在思路和方法（请参看书中《基本定理和思路》一节和其他有关部分）。如果我的这个证明能够成立的话，那么，在证明四色定理过程中所采用的思路和方法——锁阵运筹所具有的方法论的意义，无论在自然科学和社会科学的研究中均具有启迪和借鉴的价值。我相信，经过有志者的进一步研究，锁阵运筹论可望作为一种21世纪世界上新兴的方法论自立于现代科学方法论之林。比如说，在现代经济牵一发而动全身的高难度调整中，可望提供出

一种科学的运筹理论和方法。在社会学、心理学和一些自然科学中可能也会有重要的应用价值。作为一种猜想或者期望，同其他学科结合，甚至可能出现经济运筹学（或经济谋略学）、社会调控学、精神力学和技术生态工程（或技术环境工程）等一批未来新的学科。思之所至，姑妄言之，幸勿以狂谬见责。

十年磨一剑，终需费功夫。十余年来，我置许多善意的劝告于不顾，把不少等待自己去研究的问题和想写的文章搁置一旁，下决心作人生的最后一搏。虽然我不是数学专家，但我毕竟是一个做学问的人，不会口吐狂言，也不会心存侥幸。同时在做学问上，我是一个锲而不舍的人，不怕失败的人，既决定钻研某个问题，就一定要把它追寻到天涯海角。晴雨由天，毁誉由人，路由我走，这就是我的治学铭，在证明四色定理的问题上，我走了数不清的冤枉路。我的体会是，走冤枉路一点也不冤枉，不走冤枉路就找不到成功之路。道理很简单，在没有路的地方寻找通往目的地的路，怎么可能从一开始就知道怎样走才是一条成功之路呢？“一将功成万骨枯”，虽然这是讲的战争，在科学研究上道理也是相通的。从某种意义上说，科学上的成功路，正是建立在走冤枉路的“白骨”之上的。倘能尽量少走一些冤枉路，少付出一些代价，就非常难能可贵了。像我这样的数学门外汉，要攻四色定理，更难免要走更多的冤枉路，这本身就是一种特殊形式的学习。对于严肃的和付出重大代价的探讨，即便是在无望征服的山峰上，如果轻率地认为不必加以理睬，似乎有悖于科学道德。我之所以要使《证明四色定理的新数学——图论中的锁阵运筹》这本书公开出版，就是为了使数学界能够听到这个呱呱落地的婴儿的啼哭，不让它死于胎中。宁愿所有我写的书不出版，所写的文章不发表，也要使这本书问世。这就是我现在的心情。至于这个婴儿出世后的命运如何，那只有让它去见世面，接受检验了。

我赞成陈省身教授所说的，中国应当成为数学大国。不仅要有大批世界第一流的数学家，而且需要尽可能多的、各种层次的对

数学有兴趣和有志钻研数学问题的人。在这里，我不是说希望大家都去征服数学上的处女峰，而是说需要在数学上开展各种各样的登山活动。数学高深，但并不神秘，正如山峰并不神秘而当它罩上一层云雾后却使人感到神秘一样。就拿四色定理来说，立题很简单，只要稍有文化谁都可以懂得，但又极其复杂，证明起来确实很难。难和神秘并不是一回事。攻克科学堡垒，必要的知识基础是很重要的，更重要的是能力和钻研精神。我的这个证明，毫无什么神秘之处，我相信即便不是专门搞数学的人，也不是数学系的研究生和大学生，如果有兴趣，肯花功夫，也是可望看懂的，或者可以大致看出其中的门径。因此，我希望在此书出版后看过此书的海内外人士和青年朋友们，不论是否身在数学界，都能提出指正和商榷的意见。

言不尽意，文不成章。因依照惯例放在书的前面，故曰“前言”。

敢 峰

1992年12月14日夜

目　录

一、采用V—$3E$（三度正则，deg$G$=3）平面区域图G

本证明对象的原型采用V—$3E$（三度正则，即每个顶点关联3个弧——边界线）的区域图形G。在V—$3E$区域图形G中能证明四色定理，就在一切区域图形中证明了四色定理。见图1：



图 1

使前面的V——$4E$区域图之顶点C扩改为C色区，变为V—$3E$区域图形，原4个区域的相邻关系和填色并不因之有任何改变。所以不同的是，原来两个A色区和两个B色区交接于顶点C，A色区与A色区相接，B色区与B色区相接，但均无相邻的边界线，互不影响填色。因此，将顶点C扩改为C色区后，虽使A色区与A色区、B色区与B色区互不相接，但对原四个的填色与证明四色定理来说，全然无碍。顶点C扩改为C色区能证明四色定理，C色区缩变为顶点C后同样能证明四色定理成立。这也就是说F（区域数）$=n$时四色定理成立，$F=n-1$时四色定理当然也成立。如将图还原，可使C色区缩变为顶点C，将C色区一分为4，分别并入4个区。如图2：

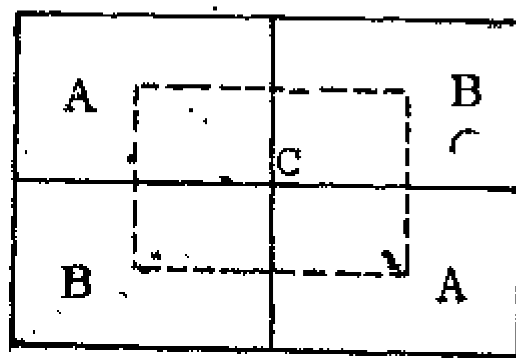


图 2

V——nE（>4），也是这样。

二、在平面区域图G中，一定有一个区域X至多只能同5个区域相邻

用欧拉定理可以证明，任何一个区域性平面图G中，一定有一个区域至多只能同5个区域相邻，由此找到证明四色定理的突破口。

令：

F＝区域的个数，

E＝弧的个数，

V＝顶点的个数。

根据欧拉（Euler）所发现的平面图的欧拉公式，顶点、弧、面三个数的关系式为：

$$V-E+F=2 \qquad (1)$$

在区域性平面图G中，由于每个弧有两个顶点，因而图G中共有$2E$个顶点，又由于每个顶点在$V-3E$图形中均为3个弧顶的点，每个顶点被数3次，因此：

$$2E=3V \qquad (2)$$

将欧拉公式两边乘以3，然后将（2）代入，得：

$$2E-3E+3F=6$$

即：$3F-E=6 \qquad (3)$

假定图G中每个区域同n个区域相邻（即有n个弧），由于每个弧的两边为两个区域（每个弧为相邻两个区域的共同边界），被数2次，因此：

$$\frac{nF}{2}=E$$

即：$nF=2E \qquad (4)$

将（3）两边乘以2，得$6F-2E=12$，然后将（4）代入，得：

$$6F-nF=12$$

即：$(6-n)F=12$ （5）

由此可以得出结论，n必定<6，即在图G中不可能每个区域至少同6个区域相邻，一定有一个区域最多只能同其他5个区域相邻。

三、对F（区域数）采用数学归纳法

在证明上，我们对F采用数学归纳法。平面区域图G中，只有4个区域或少于4个区域的，显然在填色上只需4色就足够了，不需要第五色。现在假设有一个n个区域的平面图G（$n\geqslant5$），而我们已知所有区域是$n-1$个区域的平面图只需4色。如能证明：区域数$F<n$时四色定理成立，$F\geqslant n$时四色定理亦同样成立，那么，我们就证明了四色定理。

设A、B、C、D为四色。

根据前面的证明，我们知道在任何区域性平面图G中，必有一个区域X其邻区$\leqslant5$，即最多只能同其他5个区域相邻。已知$F=n-1$时四色定理成立，即图G中除X区以外其他各区域共填有A、B、C、D四色，X区为待填色区，因此，在$F=n$时要证明四色定理，必须在任何情况下能使X区所填色为四色中的一色。如果在任何情况下，都能将四色中的一色填入X区，我们就可以借助数学归纳法把四色定理证明了。

四、对X区有4个邻区或少于4个邻区的平面区域图G四色够用的证明

如果X区只有1个、2个或3个邻区，直接对X区填上其邻区尚未用过的四色中的一色即可。困难在于X区有4个邻区特别是有5个邻区时，怎样才能在任何情况下都填进四色中的一色而又不与其邻区的填色相同。

对有4个邻区的X区，如其邻区只填有二色或三色，则直接填上其邻区未用过的四色中的一色。如果4个邻区已分别填上四种颜色，则需在保证区域图G无任何两个邻区填同一颜色的前提下，调整X区的邻区的填色，使这4个邻区共使用三色，而在X区填进四色中的另一色。这是一定可以做到的。希伍德（Heawood）在证明五色定理时已经用到这种方法。证明如下：

任取X区的一邻区A（填A色）同与其不相邻的X区的另一邻区C（填C色），从A区开始进行A、C二色互换调节，即A区改填C色，与其相邻的填C色的区域改填A色，直至整个图G的四色协调平衡（即无任何相邻区域填相同颜色）。如果X区的邻区C在A、C二色互换调节中不被涉及（即不属于同一个A—C色系，也就是说不是一个支），仍维持原填的C色不变，由于X区的原填A色的邻区已改填C色，则X区可填进A色。如果X区的邻区C被A、C二色互换调节涉及（即属于同一个A—C色系，也就是说是一个支），则X区的邻区A、C与其外相连的填A、C二色的诸区域，必定同X区形成一封闭形二色圈。于是可在这个二色圈内，从X区的邻区B（原填B色）或D（原填D色）开始，依次进行B、D二色互换调节而决不会涉及X区的另一邻区D或B（因被A—C二色线路截然分隔开来，分属两个B—D色

系）。这样，便使X区的邻区只填有三色，然后在X区填进四色中的另一色，如图3所示。

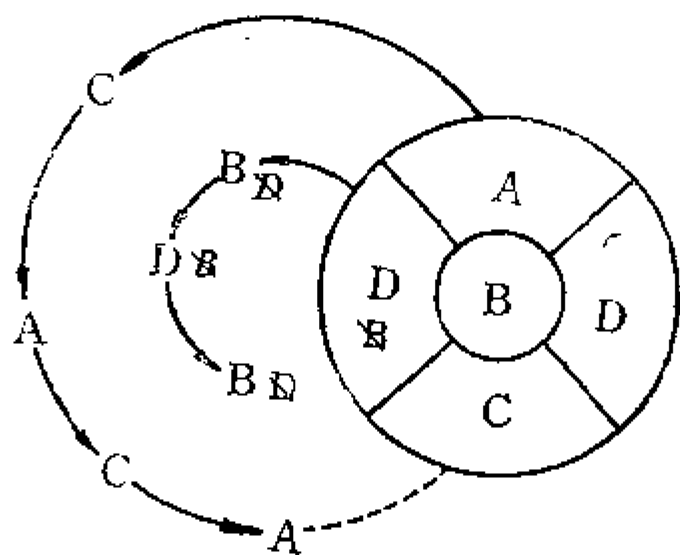


图 3

A—C—A—C—A……C可简记为A—C。其他二色线路也这样。对此，我们在后面均用简记法，它既可以表示两个区直接相邻，也可以表示中间还有n个填这两种颜色并互相连接的区域。

五、对X区有5个邻区的平面区域图G四色够用的证明

对于有5个邻区的待填色区域X，因$F=n-1$时为四色图形，故其5个邻区最多只有四色（如只有三色，则将四色中的另一色直接填入X区即可），而且其中必有不相邻的两个区域填同一颜色，如图4所示。

图4四周可能是充分多的任意性潜四色区域。这就是摆在我们面前的四色问题的珠穆朗玛峰，四外云山雾海，冰封雪锁。从此图开始，怎样才能在任何情况下都能开拓一条登顶之路，将四色中的一色填入X区，乃百余年来尚未攻克的四色天险。因此，我们可以形象地称图4为"四色天险"图，或称双B夹A的始证图B。

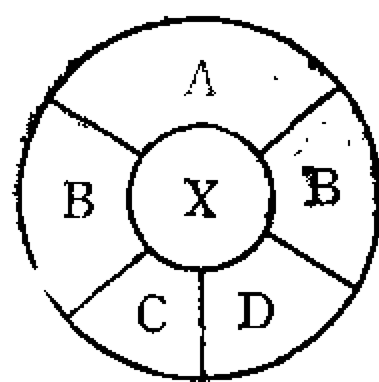


图 4

（一）基本定理和思路

为了证明当X区的邻区为5个区域而且填有4种颜色，无论四外情况如何，均能将四色中的一色填入X区，在下面先作一些规定性的说明和提出在证明中所采用和遵循的基本定理。

在区域性平面图G中，一个待填色区域与5个区域相邻，我们仍称这个区域为X区，其邻区从上述填A色区开始，按顺时针方向分别定为$V_1V_2V_3V_4V_5$。仍令A、B、C、D为四色。（见图5）

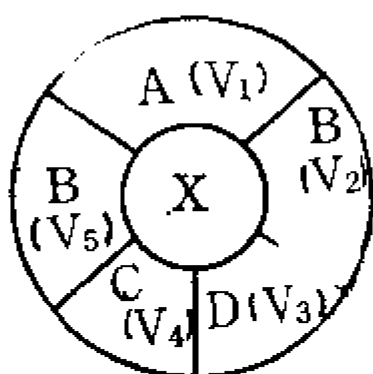


图 5

对X区及其邻区，在演绎和证明过程中我们采用区域性平面图。对其外未知的隐性区域（包括充分多的区域），只在演绎和证明过程中用线标明某些相邻区域按其填色所组成的二色通道（简称色线或线路）。例如，凡填A与C两种颜色的相邻区域可以形成A，C，A，C……通道（区域数$F\geqslant 2$），在图中用A—C表示。凡填A与D两种颜色的相邻区域可以形成A，D，A，D……通道（区域数$F\geqslant 2$），在图中用A—D表示，我们称这种图为四色演绎图C。对组成各种二色通道的两种颜色，称之为这种二色通道的色素。

由于除X以外的各区域分别填有A、B、C、D四种颜色，因此填四种颜色的区域共可形成6种由二色连成的通道：A—C，A—D，B—C，B—D，A—B，C—D。这些通道在形态上可分为两类：一类是开的，即二色通道的两端不相连，两端也不同时与未填色的X区相连，称为道路或线，在文字和符号用语中用A—C、A—D等表示。一种是闭的，称为圈，用○AB、○CD等表示。二色通道两端如果同X区相连，由于X区未填色，同样称为圈，用○ACX、○ADX等表示。对圈的一部分来说，也可称为线。

在6种二色通道中，按所填颜色分为互相对立的3组：A—C与B—D，B—C与A—D，A—B与C—D。每一组中所包含的互相对立（即无共同色素）的二色通道，在相遇时是不能相互穿过的，不能相互交叉（也不能相互粘连）。例如A—C不能穿过B—D，同B—D交叉；B—D也不能穿过A—C，同A—C交叉。因为每组互相对立的二色通道中没有填共同颜色的区域，因而也没有一个区域可以成为这两条二色通道的共同区，成为这两条二

色通道的相交点。而不同组的通道在相遇时能够互相穿过，互相交叉（也可以互相粘连），或者从二色通道的两端点穿过，同端点相交接。例如A—C可以穿过A—D或A—B，两条二色通道相交于A。由于不同组的二色通道中有填共同颜色的区域，因而这些填共同颜色的区域可以成为这两条二色通道的共同区域和相交点（称为结点）。这种状况犹如十字路口的红绿灯效应，每条二色通道对同一组的二色通道打红灯，不能通过，对非同一组的二色通道开绿灯，可以通过，而且不打红灯则必开绿灯，因之可形象地称为红绿灯效应原理。由此得出：

定理1：没有共同色素的两条二色通道不能互相穿过；有共同色素的两条二色通道可以而且必定互相穿过（包括从二色通道的端点穿过）。同理，各条二色通道，包括通过未填色区X的各条二色通道，没有共同色素的，不能形成互相交叉的二色圈。

在6条二色通道中，任何一条通道所形成的二色圈（简称圈），包括通过未填色区X相连的圈，圈内任何区域的填色凡为异于二色圈的另二色者，按定理1，由这些区域所形成的二色通道不可能穿过圈同圈外的填相同颜色的区域相连。同样，圈外任何区域的填色凡为异于二色圈的另二色者，按定理1，由这些区域所形成的二色通道也不可能穿过圈同圈内的填相同颜色的区域相连。也就是说，圈内填异于二色圈的另二色区同圈外填异于二色圈的另二色区，无二色通道相连，处于相互隔绝的状态，在二色通道上属于两个不相连的支。因此，对圈内各区域的填色进行异于二色圈的另二色互相调换（简称圈内换色或可控换色），不会影响到圈和圈外各区域的填色；同样，对圈外各区域的填色进行异于二色圈的另二色互相调换，也不会影响到圈和圈内各区域的填色。例如：在○ACX中，B与D二色可以互换，而不会涉及到○ACX外的B与D二色。在○ADX中，B与C二色可以互换，而不会涉及到○ADX外的B与C二色。在○BCX中，A与D二色可以互换，而不会涉及到○BCX外的A与D二色。在○BDX中，

A与C二色可以互换，而不会涉及到○BDX外的A与C二色。在○CD中，A与B二色可以互换，而不会涉及到○CD外的A与B二色。在○AB中，C与D二色可以互换，而不会涉及到○AB外的C与D二色。由此得出：

定理2：由二色通道所形成的圈，包括通过未填色区X相连的圈，在圈内进行异于二色圈的二色互换，不影响圈外区域的填色；在圈外进行异于二色圈的二色互换，不影响圈内区域的填色。

利用二色圈的这种可控调整的特殊功能，我们在证明四色定理的演绎过程中可以在圈内或圈外进行可控换色调整，从而一步一步探求征服"四色天险"的道路。

证明四色定理必须利用可控换色调整，以便在任何情况下都可以使X的邻区由四色变为三色，而将另一色填入X区。由于待填色区X四外的四色区域图的极端复杂性和未知性，要进行四色调整必须在可控范围内进行，否则任何调整都是无效的和没有意义的。由二色通道连成的封闭型的圈，包括通过未填色区X相连的圈，是可控换色调整的唯一凭借。由此得出：

定理3：对于待填色区X四外的四色区域图G和相应的四色演绎图C，进行可控换色调整，一定要在由二色通道形成的圈内或圈外进行（圈的二色通道可以包括未填色的X区，在实际地图中还可以包括无需填色的图外区Z）。进行这种可控换色调整后，必定整个图仍保持四色，而没有任何填相同颜色的区域相邻。

现在我们只知X区为未填色区，X区有5个邻区，5个邻区共填有4种颜色（填有3种颜色的毋需证明，只要将第四种颜色填入X区就可以了），其中必有两个区域填同一颜色。如果通过X区的二色通道形成了一个圈，这个圈的通道色括有X区的3个邻区，则其中必有X的2个邻区是填同一颜色的（因为二色通道只能填有两种颜色，如果它包括有X的3个邻区，这3个邻区也只能填有

两种颜色），而在这个圈之内和外必分别只有X区的一个邻区，并分别填的是异于二色圈的另二色。因此，在圈内或圈外进行异于圈的二色互换后，必定使圈内和圈外这两个X的邻区成为相同的颜色。这样，X区的邻区就只填有3种颜色了。由此得出：

定理4：任何二色通道经过X区所形成的圈，如有X的3个邻区是圈的组成部分，则经过圈内或圈外异于圈的二色互换，必使X的5个邻区由四色变为三色，可将四色中的另一色填入X区。

据此，我们称这种由X区连接的包括X的3个邻区的圈，为四色可解圈。

通过X区的二色通道所形成的圈，如果自身只包括X区的两个邻区，则被圈分隔开的X区的另外3个邻区必填有两种颜色，即圈内和圈外均有一个填相同颜色的X区的邻区，因而无论在圈内或圈外进行异于圈的另二色互换，被分隔开来的X区的3个邻区仍共有异于圈的两种颜色，X区的邻区仍为四色。由此得出：

定理5：任何二色通道经过X区所形成的圈，如只有X的两个邻区是圈的组成部分，均不能经过圈内或圈外可控二色互换将四色中的一色填入X区。

据此，我们称由X区连接的只包括X区的两个邻区的圈为四色不可解圈。

二色通道通过X区所形成的圈，在X区的5个邻区所填色不变的情况下，从可能性上说有4个。其中两个圈的二色通道包括X区的3个邻区，为四色可解圈；另两个圈的二色通道包括X区的2个邻区，为四色不可解圈。以双B夹A的始证图B为例，有○BCX，○ADX，○BDX，○ACX（其中○BCX与○BDX包括X区的3个邻区，○ACX与○ADX包括X区的两个邻区），不可能形成○ABX和○CDX。从实际上说，只有两个，因为按定理1，○BCX与○ADX不能同时存在，○BDX与○ACX不能同时存在。在实际存在的两个圈中，按定理4，如有一个通过X区所形成的圈的二色通道包括X区的3个邻区，为四色可解圈，则可将四色

中的一色填入X区。如果一个也没有，按定理1，同时有两个通过X区的圈只包括X区的两个邻区，即同时有两个四色不可解圈。这两个圈在二色通道上必不包括两个填相同颜色的X区的邻区，只能包括X区的另外3个邻区，其中的一个X区的邻区为这两个圈的二色通道所共同包括。我们可共称这两个圈为“并蒂圈”，而称两圈共同通过的X的邻区为“并蒂区”。如果这个“并蒂圈”的双圈互不交叉，分别将填相同颜色的X区的两个邻区分隔开来，则在这两个非交叉的“并蒂圈”中，任选其一，在圈内或圈外进行可控换色后，必将使这两个圈中的另一个圈包括X的3个邻区，按定理4，这个圈一定是四色可解圈。在这个四色可解圈内或外进行可控换色，必将使X区的邻区变为三色。这样，定可将四色中的一色填入X区（见图6）。

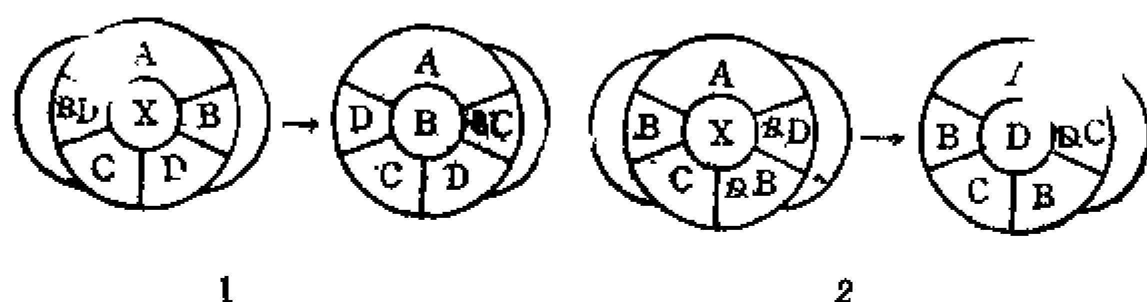


图 6

由此得出：

定理6：两条二色通道同X区分别形成了两个圈，如果这两个圈自身共包括X区的3个邻区，而且互不交叉，则任选其中一个圈，在圈内或圈外进行异于圈的二色互换后，一定形成一个四色可解圈，可使X区的5个邻区由四色变为三色，从而可将四色中的另一色填入X区。

据此，我们称“并蒂圈”的双圈互不相交者为四色可解“并蒂圈”。

倘若上述“并蒂圈”互相交叉，则在其中一个二色圈内（或

圈外）进行可控二色互换（即进行异于圈的二色互换）时，必涉及另一个二色圈的填色，使另一个二色圈遭到破坏。这时出现了两种可能：

一种可能是，原来被破坏了的二色圈，在上述可控换色后，经过新的线路依然形成二色圈，而且由于X区的一个邻区所填颜色发生变化，从而使这个二色圈成为四色可解圈。按定理4，经可控换色可将四色中的一色填入X区（见图7）。

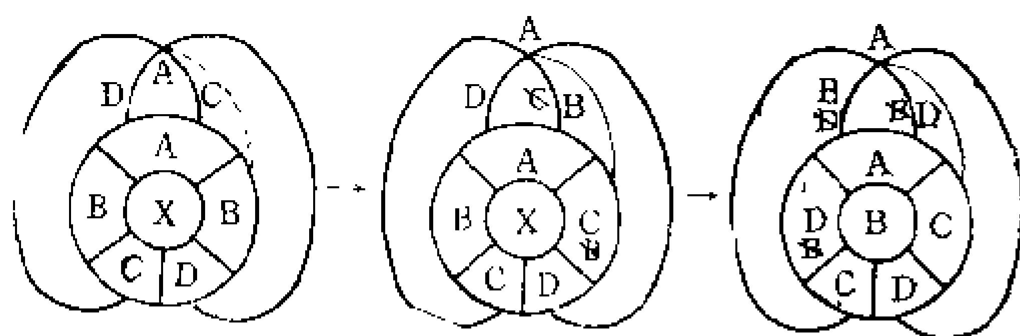


图 7

一种可能是，形不成这种四色可解圈，按定理1，同遭受破坏的二色圈相对立的新的二色圈必然存在，而且只能从原二色圈遭破坏的地方通过，由此形成了交叉“并蒂圈”的转换，同时也形成了“并蒂区”的转换。照此演绎下去，如果在交叉“并蒂圈”内进行上述可控换色调整多次不成功，即每次都不能形成四色可解圈，则交叉“并蒂圈”和“并蒂区”就要转换多次。这种转换可以按顺时针方向进行，也可以按逆时针方向进行，是以“并蒂区”的转移方向为标志的。要按顺时针方向转移，则要循序改变“并蒂区”右侧的X区的邻区所填颜色（在圈内或圈外进行可控二色互换）。按逆时针方向转移，则要循序改变“并蒂区”左侧的X区的邻区所填颜色。按顺时针方向同按逆时针方向进行可控二色互换，是互为复归的。我们择定顺时针方向，在始发图B中，“并蒂区”的转移顺序见图8（1为转移前的“并蒂区”）。

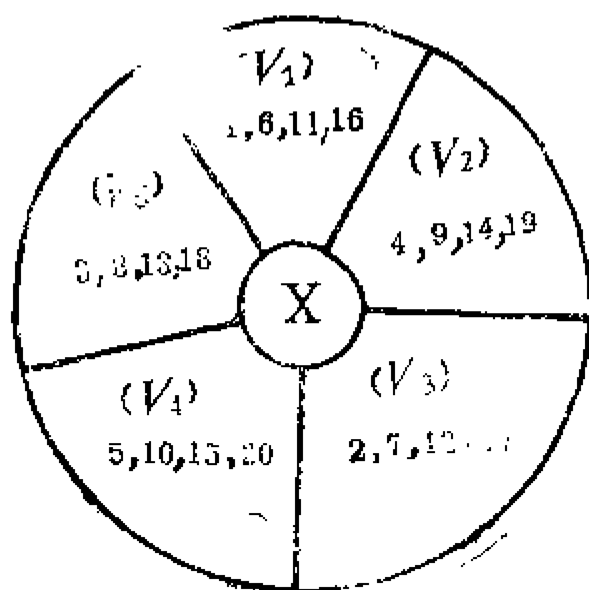


图 8

这种“并蒂区”的运转，在后面的实证过程中将会循序进行，在这里先预写一笔。

在交叉“并蒂圈”的循序转移过程中，已形成的二色通道具有延续性，只能在可控换色调整中改变二色通道的色素，而不能改变通道本身，并按定理1不允许有相对立的二色通道（即无共 同色素的二色通道）通过。每一步欲使四色不可解所形成的二色通道，不论其后色素如何变化，均具有四色不可解的性质。通过循序的实际演绎，把这些二色通道聚集起来，最后所形成的二色通道网络称为四色不可解线路集合。在由二色通道形成四色不可解线路集合的演绎过程中不允许与其相对立的二色通道穿过并形成二色圈（这个二色圈乃四色可解圈），否则为四色可解。其具体证明见后面的二阶四色不可解线路集合基准图N的二十步演绎。由此得出：

定理7：在欲使四色不可解的二色通道、二色通道网络形成四色不可解线路集合的过程中，不允许相对立的二色通道通过并在演绎过程中形成二色圈。如果破坏了这种二色通道的关系，则线路图形（四色演绎图C）由四色不可解转换为四色可解。

至于在演绎过程中两条二色通道交叉粘连和所形成的桥，以及4线桥定理、引理和3线桥定理等，同以上定理不属于同一个层次，后面专题再议。

下面着重谈谈攻克“四色天险”图的思路。

现在摆在我们面前的最大困难问题是，在X区的邻区以外的

非定形的和包蕴一切可能性的隐性区域群中，我们只知道所有区域都分别填有四色中的一色，而且无填相同颜色的区域相邻。其他什么都不知道了。对于前述的二色通道和形成的圈有哪些也一概不知道。先假设，后论证，设想出各种各样的情况，分门别类逐一加以证明，似乎是可以采取的，但情况太复杂，无论怎样设想，怎样穷举，也不能终其极，即使运用电子计算机，对此也难能为力，而且在证明过程中可能出现或隐藏的漏洞很多。怎么办？

要确定这样一种战略，即：寻求建立一个全方位的、连锁有序的、通过可控二色互换不断否定四色可解所形成的完整和无所不包的二色通道网络体系。我们称这种网络体系为四色不可解线路集合。在这个网络体系中证明了四色定理，就在一切情况下证明了四色定理。因为其他一切四色可解的情况，在形成四色不可解线路集合的演绎过程中都已实际上被证明，因而被排除了。

要找出最终证明四色定理的由二色通道所形成的网络体系，每一步都不能是随意性的。第一，要连锁有序；第二，必须严格建立在排除四色可解的基础上。每一条二色通道和所形成的圈，都必须是排除四色可解的产物，是排除四色可解所必需的而不是随意的和可有可无的。我们的战略目标是要最终证明四色定理，但在具体的实际战役中，每一步和每一个措施都要反其道而行之，采用反求法。这样，我们就在整个过程中，一方面依序地、逐一地、系统地、越来越多地排除了各种四色可解的情况（实际上是每一步都证明了在这类情况下四色定理是可以成立的）；另一方面，像水落石出一样，不断缩小了四色尚不可解的范围，又为进一步证明四色尚不可解的情况创造了二色通道和圈的条件。从一阶的（演绎的第一阶段，交叉“并蒂圈”不转换，只利用两种二色圈进行可控换色）四色不可解线路图，到形成二阶的（演绎的第二阶段，交叉“并蒂圈”连锁循序转换，利用4种或3种二色圈进行可控换色）四色不可解线路集合，这样，就在证明四色

定理过程中，能毫不遗漏地排除了其他所有一切四色可解的情况，把剩下的唯一的一类尚不可解的情况集中到这个线路集合（完整的显形的二色通道网络系统）中来，在三阶（第三阶段）最后集中地加以彻底解决。这是一种不用穷举法而能穷尽一切情况的证明方法。

形象地说，每一个交叉"并蒂圈"都是一把锁，锁开为四色可解，锁关为四色不可解。求四色不可解线路集合，就要形成交叉"并蒂圈"的全方位连环（或称连锁）运转，要求每一步运转都使上一个交叉"并蒂圈"的开同下一个交叉"并蒂圈"的关统一起来，直至整个交叉"并蒂圈"的运转回复到周而复始的状态。这样，四色不可解线路集合，也就是一个全方位的连环锁阵。否定四色定理，摆出了这个锁阵；证明四色定理，就要攻破这个锁阵。因此，我们也可以称摆出这个锁阵和攻破这个锁阵的全过程为锁阵运筹。

综上所述，得出以下运筹法则：在证明四色定理的过程中，从始证图B开始，二色通道和圈的选择每一步必须排除四色可解，连锁循序进行，最后形成完整的显形二色通道网络系统，即四色不可解线路集合。然后再在这个四色不可解线路集合中最后求得四色定理的证明。失序则乱，使对四色定理的证明变得渺茫和不可捉摸。

对于这个过程，即对X区的5个邻区进行全方位的有序的连锁运筹式的可控换色调整，以及最后的四色可解证明，简称四色演绎过程。

下面，从始证图B开始进行四色演绎。

在“四色天险”图(或称始证图)B面前，现在共有○BDX、○BCX、○ACX和○ADX4种二色圈可供利用。即，

(1)按定理4，在○BDX内进行C与A二色互换，可将C色填入X区。或在○BDX外进行A与G三色互换，可将A色填入X区(见图9)。

(二)排除一阶四色可解和找出一阶四色不可解线路基准图M及非基准图一阶图M′、一阶图p、一阶图P′

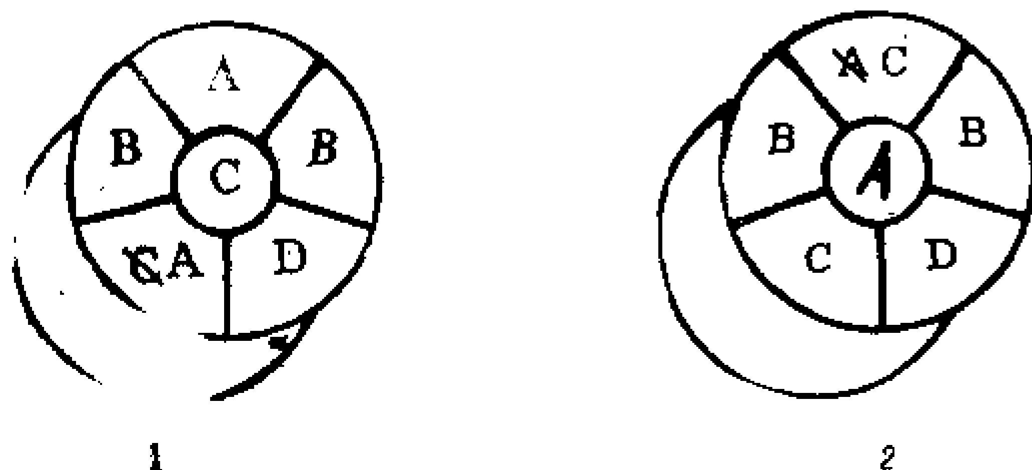


图 9

(2)按定理4，在○BCX中进行D与A二色互换，可将D色填入X区。或在○BCX外进行A与D二色互换，可将A色填入X区(见图10)。

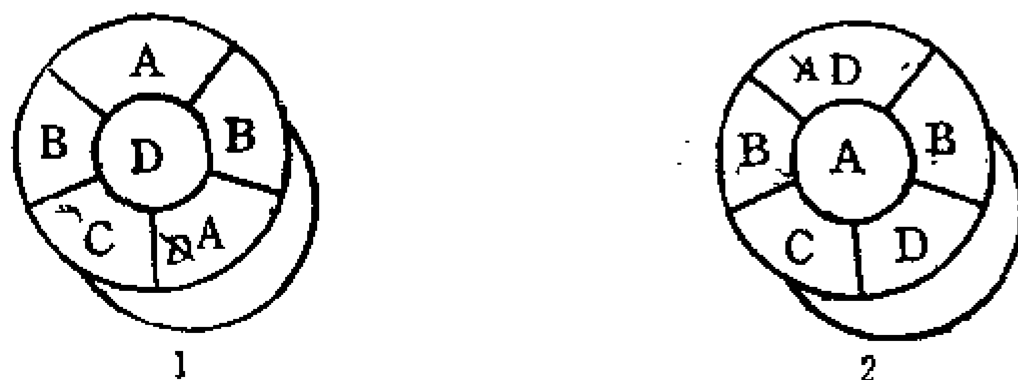
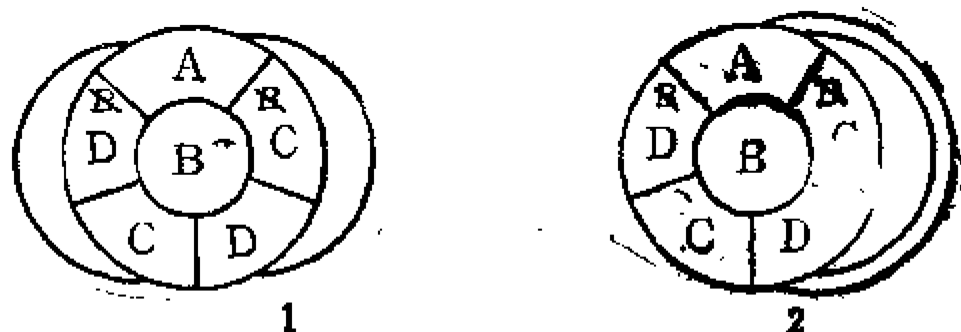


图 10

如果排除了（1）（2）两种情况，即不使（1）（2）（3）成立，不能形成○BDX和○BCX，则必形成○ACX和○ADX。这两个圈如果互不交叉，按定理6，第一步在互不交叉的○ACX或○ADX内（或外），择其一进行B与C或B与D二色互换，形成四色可解圈，第二步再在四色可解圈内（或外）进行可控二色互换，使X区的邻区只有三色，将四色中的另一色填入X区。（见图11）



（在拓扑中，图11之②图与①图相同）

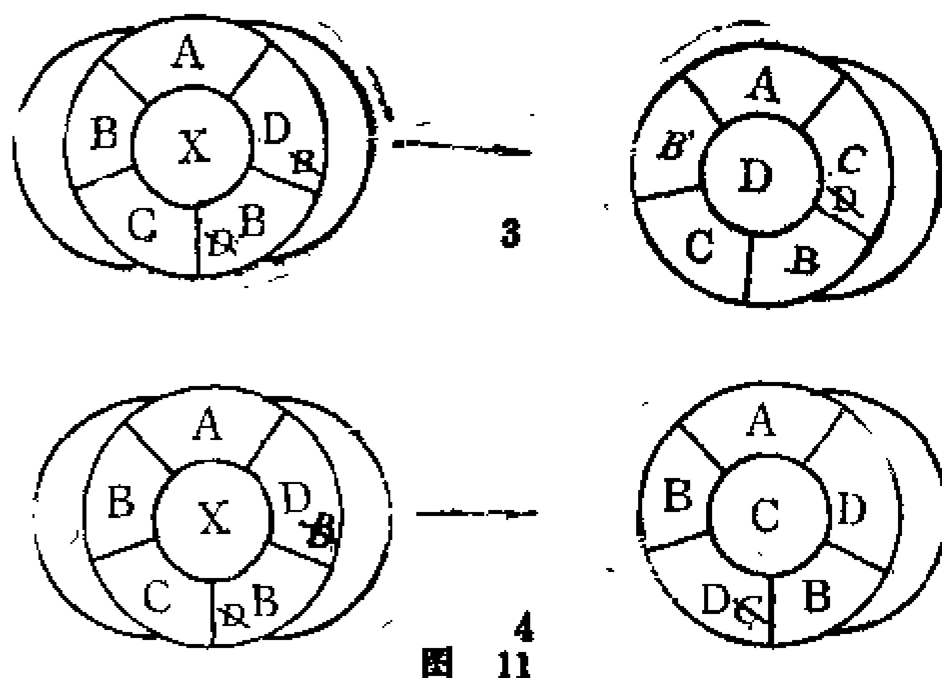


图 11

（4）再排除这种情况，如果○ACX与○ADX交叉（如图12，其中“……”表示隐线），形成一个交叉的“并蒂圈”，则情况极为复杂，四色难解。

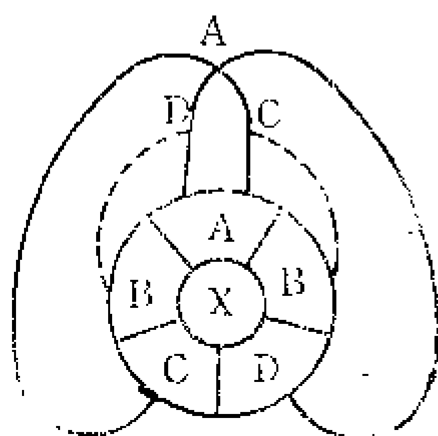
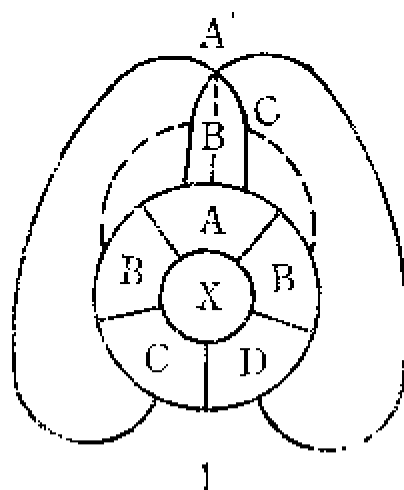
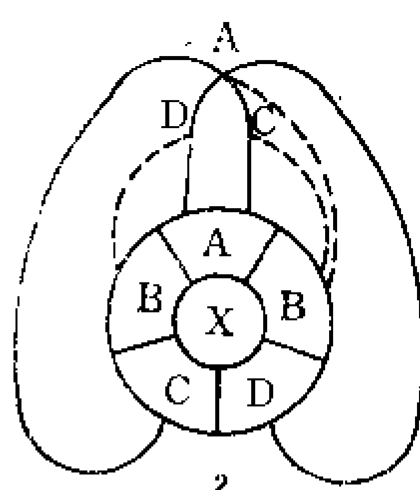


图 12

在图12的○ACX中，称填D色的点为D(v_1)，B(v_8)与D(v_1)必有B……D隐线，否则可以形不成○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”。在○ADX中，称填C色的点为C(v_2)，B(v_2)与C(v_2)必有B……C隐线，否则也可以不形成○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”。另外，D(v_1)与C(v_2)如无C……D隐线相连，按定理1，则其间必有A……B隐线相隔。如果D(v_1)无D……C与左侧的A——C交会，C(v_2)无C……D与右侧的A——D交会，则○ACX与○ADX的交点A(u_1)必有A……B在二色圈内同X区的邻区A或B相连(见图13)。



1



2

图 13

请注意：图13中，在“并蒂区”A(V)与交点A(u_1)之间存在着3条不同的二色通道(二显一隐)，没有一条二色通道可以从这个色线束中横向穿过。

在上图中，因A……B在○ADX内，因而在○ADX内B与C二色互换后，A……B变为A……C，○ACX依然存在，而且成为

四色可解圈。因此，再在○ACX中进行B与D二色互换，可将B色填入X区（见图14）。

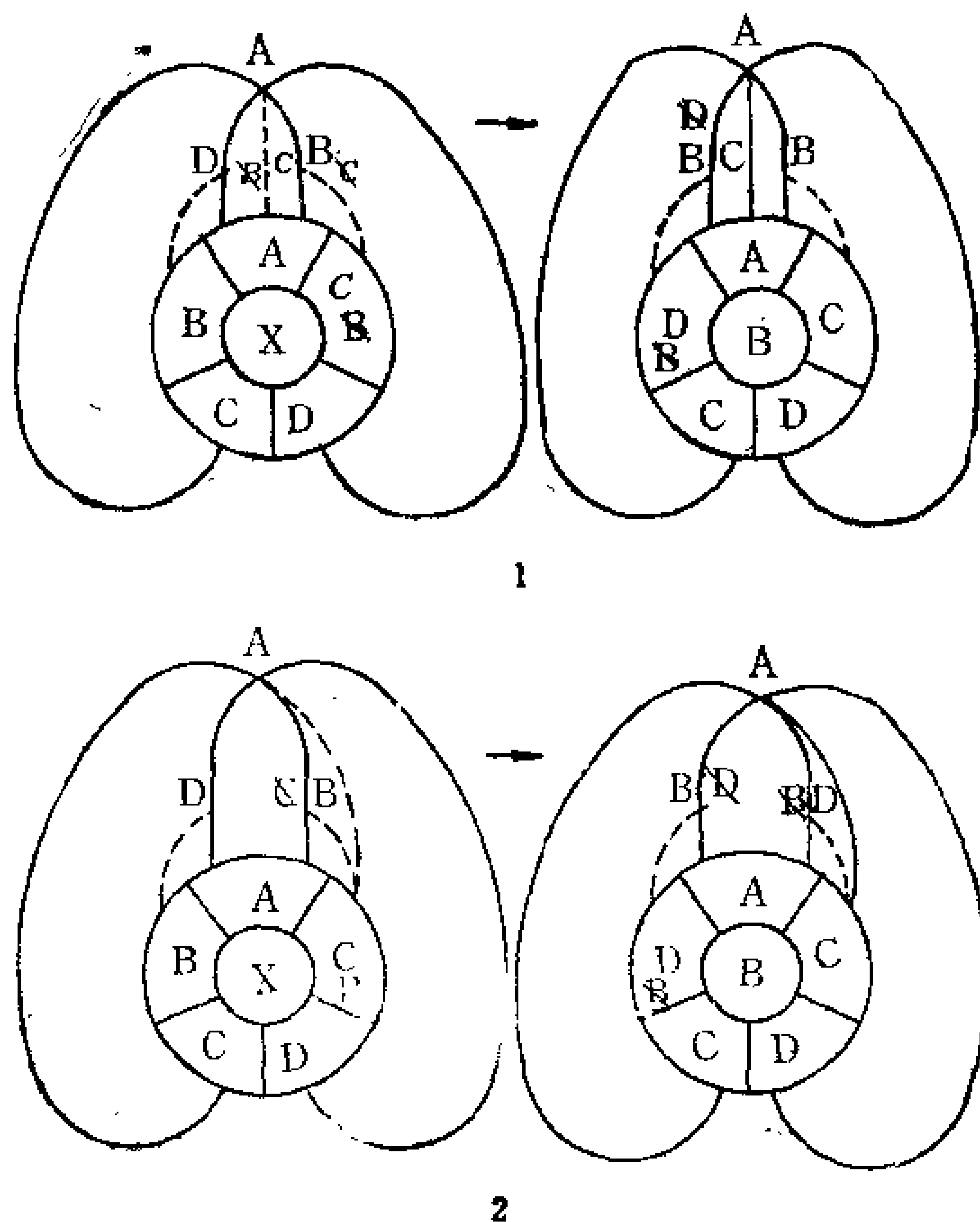


图 14

如果A……B不是在上图的位置而是只在○ACX内，则先在○ACX中进行B与D二色互换，A……B变为A……D，○ADX依然存在，并成为四色可解圈。因此，再在○ADX中进行B与C二色互换，可将B色填入X区，

真正的困难在于：如果在○ACX与○ADX交叉地带内，D（v_1）与C（v_2）之间有D……C隐线，并延伸到与两侧的A—C、A—D交会（见图15），则在○ADX内进行B与C二色互换时打破了○ACX，同样，在○ACX内进行B与D二色互换时打破了○ADX，使前图的上述证明不成立。

图15为○ACX、○ADX二圈可控换色演绎的四色不可解基准图，称为一阶四色不可解线路基准图M（简称一阶图M）。

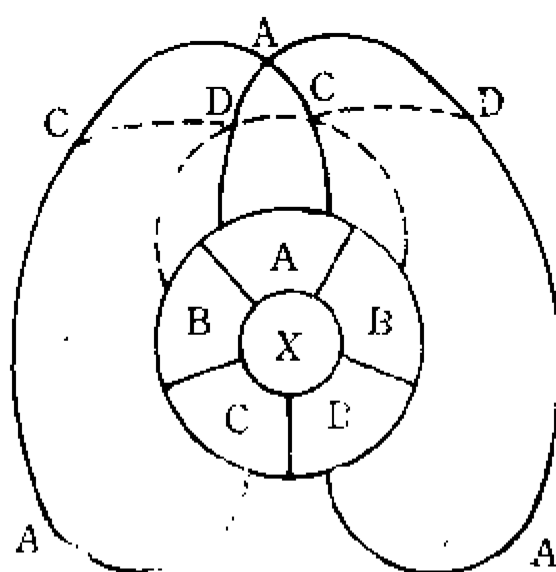


图15 一阶图M′

另外，还有一种情况，上述A（u_1）至X邻区A、B的A……B隐线穿过○ACX与○ADX交叉"并蒂圈"，一部分只在○ADX内，一部分只在○ACX内，因而无论在○ACX内或者在○ADX内进行可控二色互换亦均为四色不可解。我们称这类图形为一阶四色不可解线路图M′，简称一阶图M′，其共同特征为C……D隐线不能贯通（见图16），它在二阶中四色演绎的结果，为二阶四色不可解线路集合图N的复式图，因而可称它为一阶图M的等价图。

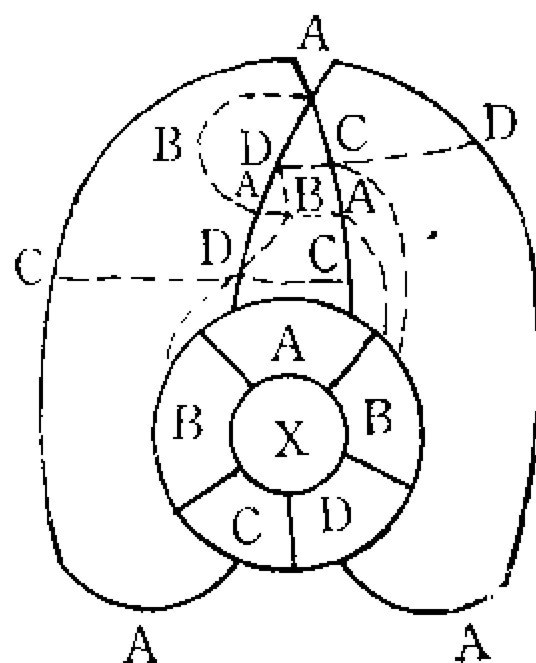


图16 一阶图M′

在演绎证明中，我们规定：A—C与A—D的一次交叉，线路同在一侧者移为两侧，二者拓扑同构。在图形下方交叉者移至上方，二者拓扑同构（见图17）。

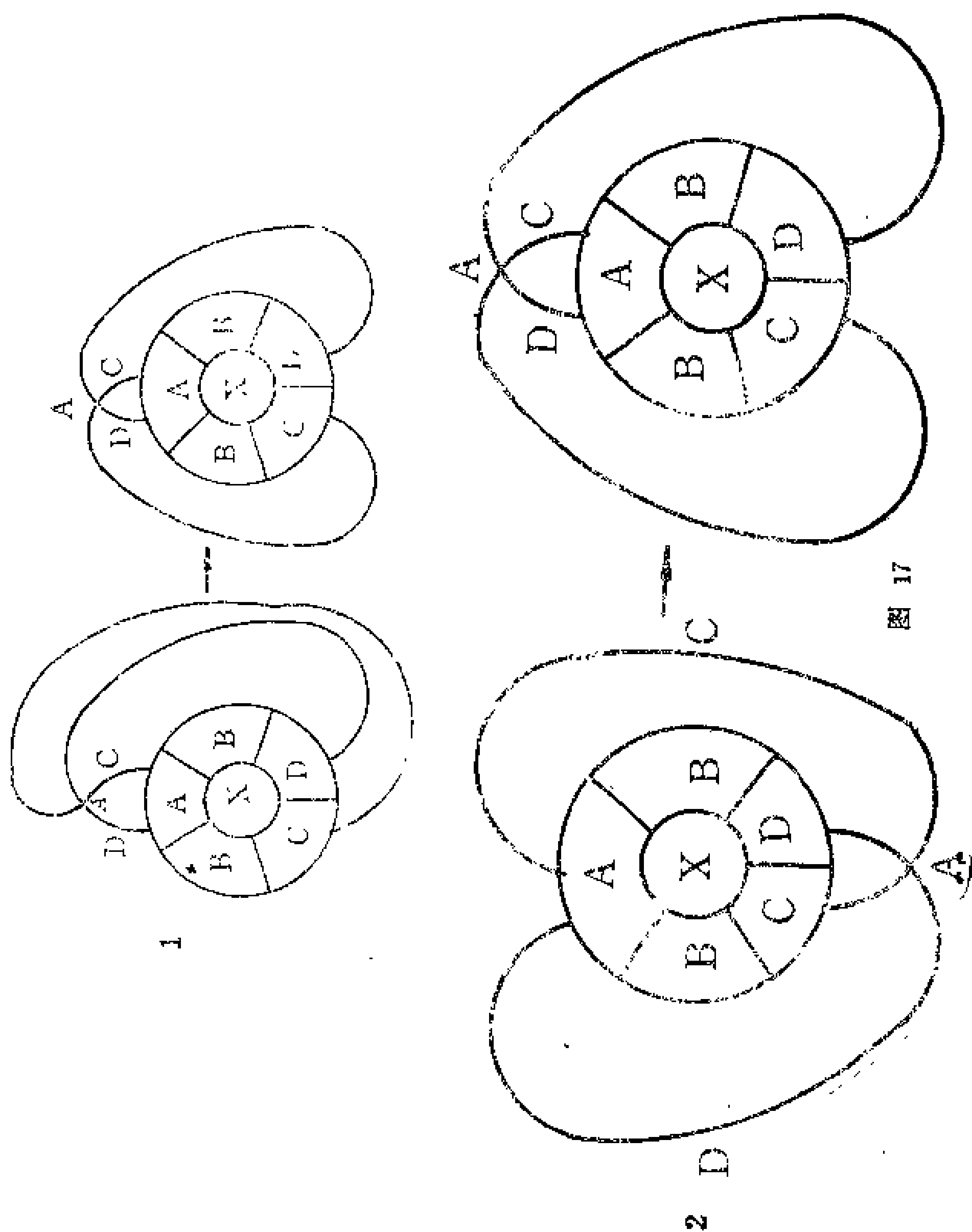


图 17

上述A—C与A—D的一次交叉图，即○ACX与○ADX是一次交叉“并蒂圈”，是一阶四色不可解的基本图（或称基准图）。此外，A—C与A—D还可形成许多各种n次交叉的复式图（为避免与后面重复，此处免列），其四色不可解线路的本质要求与一阶图M或一阶图M′完全相同。其中：凡不在○ACX或○ADX中有A……B连接X的邻区A、B（V_1，V_2，V_5）与交叉“并蒂圈”的最后正向交点A（u_1）的，也就是说，存在连接D（v_1）与C（v_2）并延伸到两侧A—C、A—D的C……D隐线的，称一阶图M的复式图P。凡在○ADX、○ACX两个二色圈内有A……B连接X的邻区A、B（V_1，V_2，V_5）与交叉“并蒂圈”的最后正向交点A（u_1），而其中一部分只在○ADX内，一部分只在○ACX内，我们称其为一阶图M′的复式图P′。在后面的二阶四色演绎中，一阶图P′与一阶图P等价，同为二阶图R_2。

总之，一阶四色不可解线路图，必须有两个条件，一个是存在○ADX与○ACX交叉“并蒂圈”，否则为四色可解；一个是不能在○ADX内或○ACX内有连接A（u_1）与X邻区A、B（$V_1V_2V_5$）的A……B隐线，否则亦为四色可解。○ADX与○ACX的交叉“并蒂圈”，我们将它分为一次交叉与多次交叉（2次与2次以上各种各样的交叉）两类。不使有A……B隐线在○ADX内或○ACX内连接A(u_1)和X邻区A、B(V_1，V_2，V_5)，我们也将它分为两类，一类是在○ADX与○ACX这两个二色圈内无A……B隐线相连（即v_1与v_2之间有C……D隐线并伸延到两侧与A—D、A—C通道上的D、C交会），一种是在○ADX与○ACX这两个二色圈内有A……B隐线相连，一部分只在○ADX内，一部分只在○ACX内（即上述C……D隐线被A……B隐线隔断），因而一阶四色不可解的线路(包括隐线的因素)总共只可能有一阶图M，一阶图M′，一阶图P，一阶图P′四种图形。一阶图M为基准图，一阶图M′为它的等价图。一阶图P

为一阶图M的复式图，一阶图P′为一阶图M′的复式图和一阶图P的等价图，因而也可以视为一阶图M的复式图。一阶图M′，一阶图P，一阶图P′都是一阶四色不可解的非基准图。

这个阶段的四色演绎过程称为一阶证明，即以不转换交叉“并蒂圈”为标志的证明。在一阶证明中，我们排除了一阶四色可解的线路和找出一阶四色不可解线路图M、一阶图M′及其复式图。下面，就在这个基础上进入二阶四色演绎。

（三）排除二阶四色可解和找出二阶四色不可解线路集合基准图N

二阶四色演绎的标志，就是通过可控换色循序连锁转换交叉“并蒂圈”。这样，就要从○ACX与○ADX二圈并用转为○ACX、○ADX、○BCX、○BDX四圈并用或○ACX，○ADX、○CDX三圈并用，使交叉“并蒂圈”循序连锁地进行全方位的转换，排除二阶四色可解和找出二阶四色不可解线路集合。

由于X区的5个邻区其外为任意的四色图，无限复杂，不仅利用两种二色圈证明已无能为力，即使在4种或3种二色圈并用过程中也必将出现某种情况为四色可解，某种情况为四色尚不可解，而且用穷举法证明或分类加以证明，皆不能穷其极。因此，必须在整个二阶四色演绎过程中，通过交叉“并蒂圈”全方位的循序连锁转换（只能分别通过4种或3种二色圈内或圈外的可控换色进行），将所有四色可解的线路加以排除和舍弃，最后找到运用4种二色圈（简称四圈）或3种二色圈（简称三圈）也不能使四色可解的线路集合，即二阶四色不可解线路集合。然后，在更高的证明阶段上，再以这个二阶四色不可解线路集合为基础，确认和证明是否在任何情况下都能将四色中的一色填入X区和四色定理是否成立。

怎样找到这种四圈或三圈可控换色演绎的四色不可解线路集

合呢？

在前述利用○ACX、○ADX二圈进行换色演绎的一阶四色不可解线路基准图M中，A与C二色互换或A与D二色互换，实际上图形中各二色通道的关系未变，两者互为异色图，因而没有意义。A与B二色互换，或者C与D二色互换，也一样。只有在二色通道所形成的圈内或圈外对另二色进行互换，才会引起其他新的二色通道的出现。因此，进一步的演绎只有两种可供选择：一种是在○ADX中进行B与C二色互换（或在○ACX内进行B与D二色互换），一种是在○ADX外进行B与C二色互换（或在○ACX外进行B与D二色互换）。我们选定前一种。后一种形不成四圈可控换色演绎，而是○ACX、○ADX和○CDX三圈可控换色演绎。

1.通过四圈全方位连锁可控换色调整，找出二阶四色不可解线路集合基准图N

在一阶四色不可解线路基准图M中，也就是从○ACX与○ADX交叉"并蒂圈"中，从X的邻区双B夹A的右侧B区——即B（V_2）区开始，按顺时针方向（称为顺向转换）依次改变X的5个邻区中两个填相同颜色的右侧区填色（按逆时针方向依次改变X的5个邻区中两个填相同颜色的左侧区填色也可以，称为逆向转换）。即：在○ADX中进行B与C二色互换，使形成交叉"并蒂圈"的转移，X区的邻区双B夹A变成双C夹D色型；再在○DBX中进行C与A二色互换，使形成交叉"并蒂圈"的转移，X区的邻区双C夹D变成双A夹B色型；再在○BCX中进行A与D二色互换，使形成交叉"并蒂圈"的转移，X区的邻区双A夹B变成双D夹C色型……。X区的邻区总共有双B夹A、双C夹D、双A夹B、双D夹C四种色型。在四圈按顺时针方向进行的四色演绎中，不管交叉"并蒂圈"的二色通道如何变化，

X区的5个邻区换色的次序一定如下（见图18）：

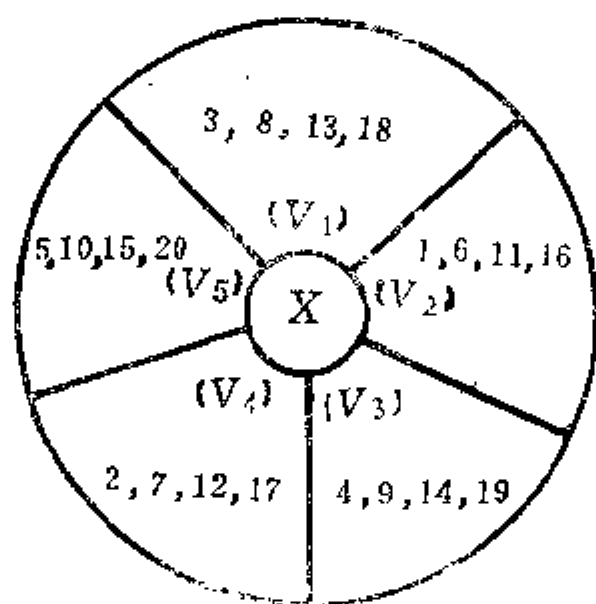


图 18

在这个一系列可控换色的过程中，一定要严格地、有序地、连锁地（交叉"并蒂圈"圈圈相扣）排除四色可解圈，使四色不可解的交叉"并蒂圈"按顺时针方向逐步进行全方位的转移，目标就是要寻找和最后形成四圈不可解的线路集合。凡四色可解的线路均予排除，每一步都选择四色不可解的线路。也就是说，在形成二阶四色不可解线路集合中，决不使出现任何通过X区及其3个邻区的二色圈（即四色可解圈），也不可出现四色可解的非交叉"并蒂圈"，因为出现这种情况（称为四色可解现象），按定理4和定理6就可将四色中的一色填入X区。对四色可解圈的简明识别方法是：在X区的5个邻区中，凡在填相同颜色的两个区之间形成了二色通道的，也就是四色可解圈。因此，在寻找二阶四色不可解线路集合的过程中，一定要注意不能让填有相同颜色的X区的邻区之间形成二色通道。例如，X区的5个邻区中有两个区填B色，在这两个区之间不能有B—D或B—C线相连，否则就形成了○BDX或○BCX四色可解圈，经在圈内或圈外进行另二色互换后，可将X的邻区中所消失的一色填入X区。同样，X的5个邻区有两个填C色，在这两个区之间不能有C—B或C—A线相连。X的5个邻区有两个填A色，在这两个区之间不能有A—C或A—D线相连。X的5个邻区有两个填D色，不能有D—A或D—B线相连。否则，即为四色可解图形。

在X区的5个邻区中，对填相同颜色的两个区要在四色演绎

中(通过圈内或圈外进行另二色互换)循序进行变换。每一次变换的结果，既要先通过线路未定地带连通一个新的圈(或用已有现成的圈)，不使填相同颜色的X的邻区连接成圈，而要形成新的交叉“并蒂圈”(否则四色可解)，然后又要在新连通的二色圈内或圈外(以循序变换X的一个邻区的填色为准)进行可控换色时打破原有的一个圈，和避免形成新的四色可解圈，改变X区的一个邻区的填色和整个邻区的色型，为下一步形成新的交叉“并蒂圈”作准备。如果在其后的交叉“并蒂圈”的转移过程中出现了四色可解圈，那就是在它前面的通过线路未定地带连通新的二色圈时所择线路有误，需回过头来另择线路重新演绎。也就是说，在交叉“并蒂圈”的循序转换的全过程中，要始终保持交叉“并蒂圈”，不使变为四色可解圈或四色可解“并蒂圈”。

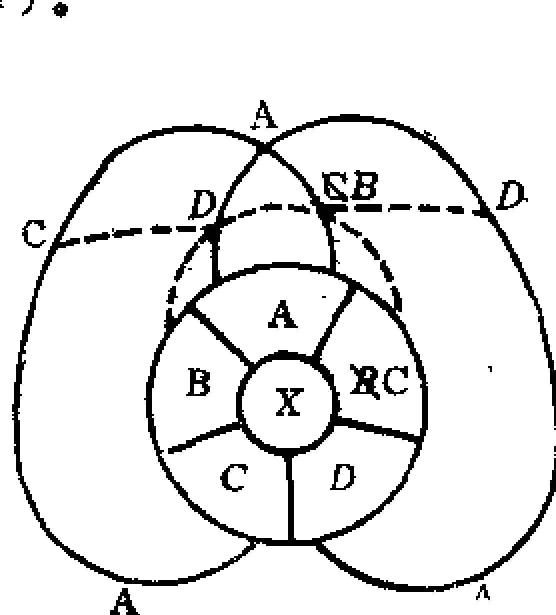
这种四色演绎要一直进行到使X区的5个邻区的填色恢复到演绎前的原状为止(如果再进行新一轮的演绎，或者从相反的逆时针方向进行演绎，结果相同)。也就是说，从一阶四色不可解线路基准图M开始，循序进行20步可控换色演绎，如果能够在形成二阶四色不可解线路集合这个全过程中，排除四色可解现象，使X区的5个邻区回复到始证图B的填色，那么，在这个全过程中所形成的线路网络体系就是四圈可控换色演绎的四色不可解线路集合，即二阶四色不可解线路集合。

下面就从一阶四色不可解线路基准图M开始，循序分步进行全方位的具体的二阶四圈可控换色演绎。

第一步:(见图19):从○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”开始，在○ADX中进行B与C二色互换，打破○ACX(即打破可控换色后的四色可解圈，以下各步相同)，X的5个邻区呈双C夹D色型。

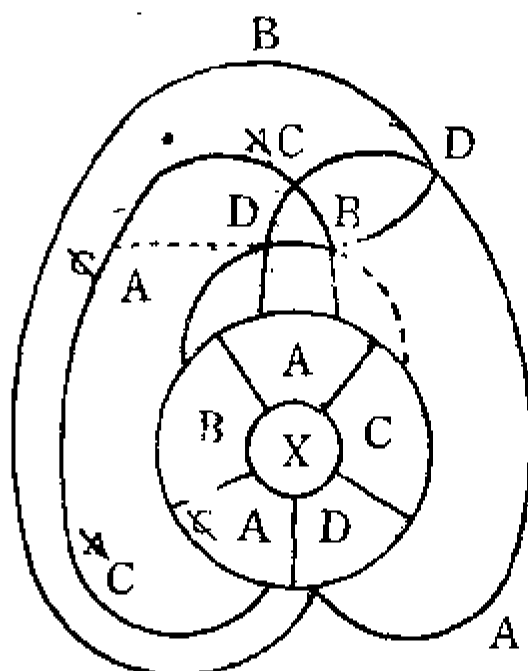
第二步(见图20):从D(V_3)始，D—B取图左外侧顺时针线路连接成○DBX，形成○DAX与○DBX交叉“并蒂圈”。在○DBX中进行C与A二色交换，打破○DAX，X的5个邻区呈双A夹B色型(如果D—B取右外侧线路逆时针方向同B(V_6)连接，

线路的拓扑性质未变，为拓扑同构，因而可移至左外侧。但若从○DAX内直接穿出与B（V_8）连接，在其后的演绎中为四色可解）。



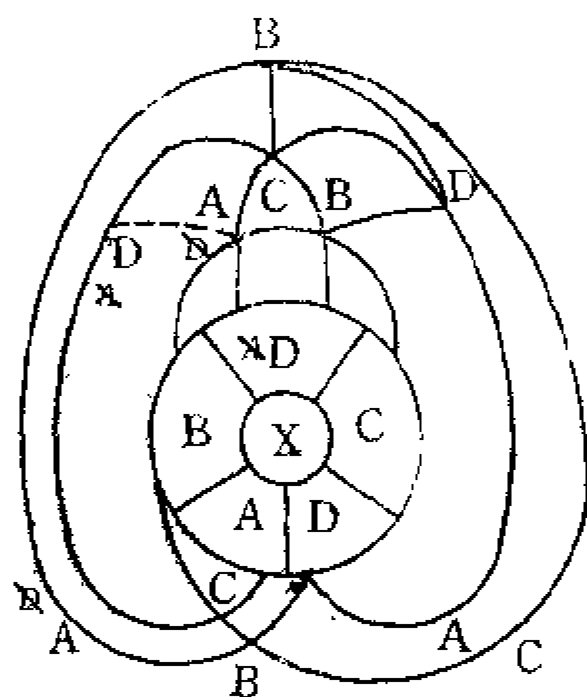
（第一步）

图 19



（第二步）

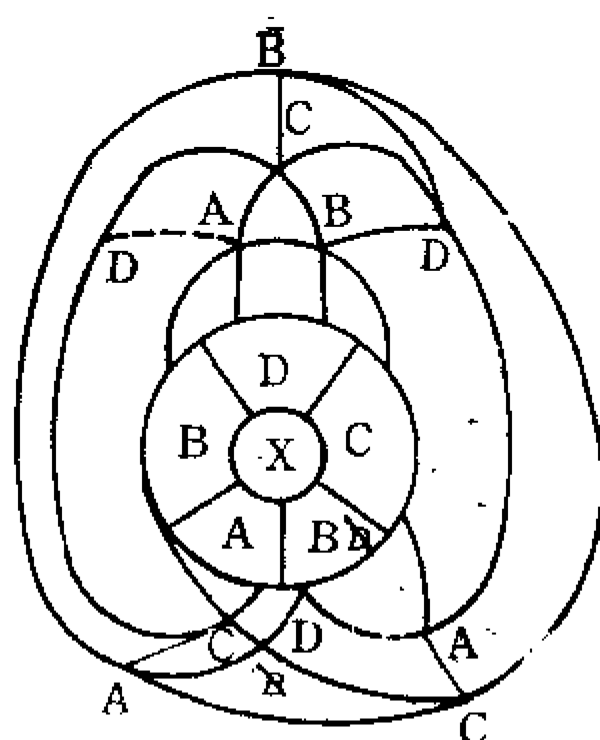
图 20



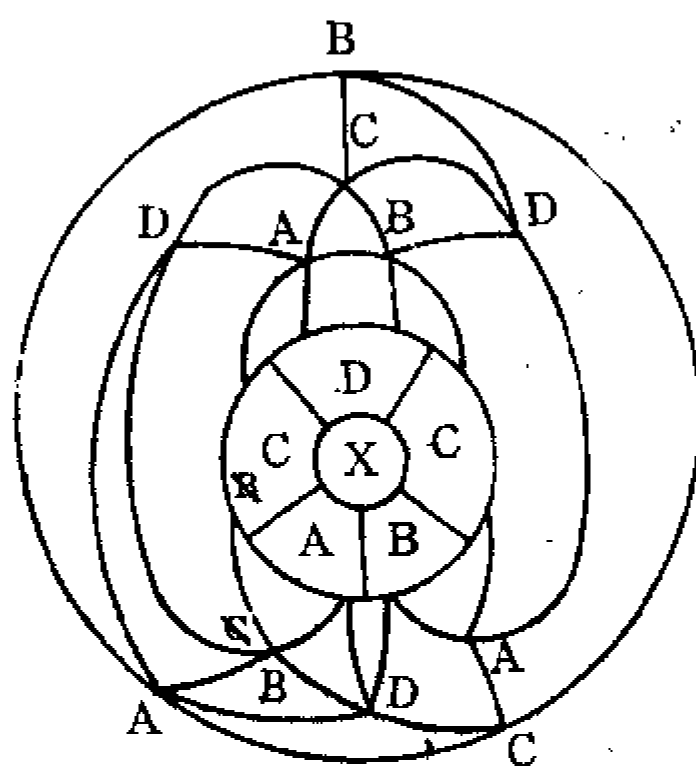
（第三步）

图 21

第三步（见图21），从B（V_8）始，B—C取图右外侧逆时针线路形成○BDX与○BCX交叉"并蒂圈"。在○BCX外进行A与D二色互换，打破○BDX，X的5个邻区呈双D夹C色型（如B—C在图左外侧者，可移至图右外侧，因拓扑同构）。



（第四步）
图 22

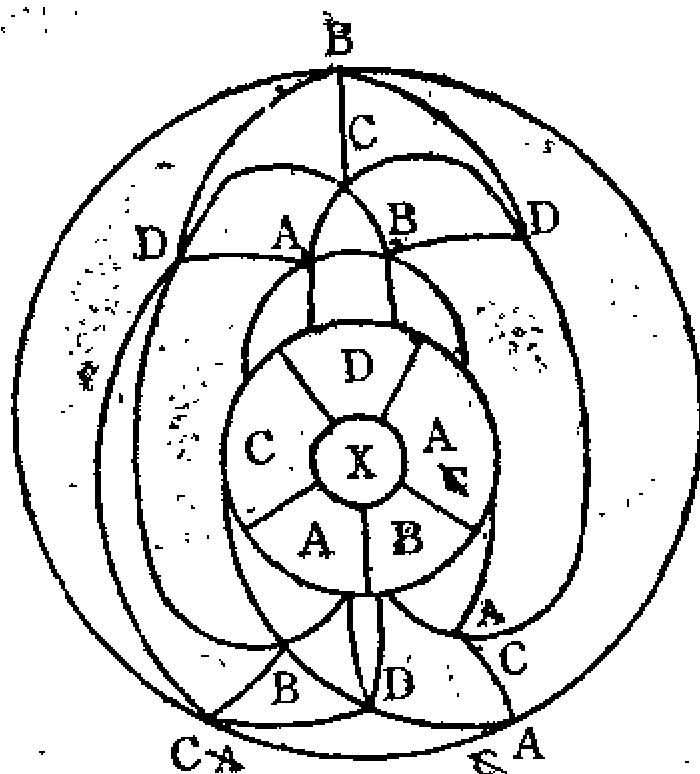


（第五步）
图 23

第四步（见图22）：从C（V_2）始，使C—A通过线路未定地带连接已有的A、C诸点成○CAX，并形成○CBX与○CAX交叉“并蒂圈”。在○CAX中进行D与B二色互换，打破○CBX，X的5个邻区呈双B夹A色型。

第五步（见图23）：从A（V_4）始，使A—D通过线路未定地带连接已有的D、A诸点成○ADX，形成○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”。在○ADX中进行B与C二色互换，打破○ACX，X的5个邻区呈双C夹D色型。

第六步（见图24）：从D（V_1）始，使D—B通过线路未定地带连接已有的D—B线成○DBX，形成○DAX与○DBX交叉“并蒂圈”。在○DBX外进行C与A二色互换，打破○DAX，X的5个邻区呈双A夹B色型。



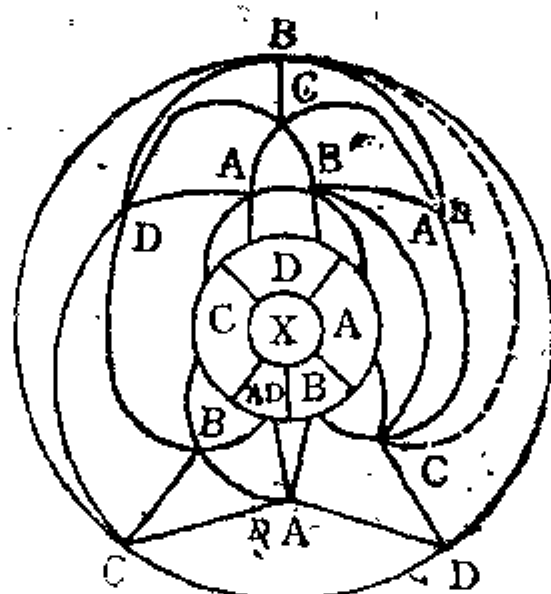
（第六步）

图 24

第七步（见图25）；从B（V_1）始，使B—C通过线路未定地带连接已有的B—C线 成○BCX，形成○BDX与○BCX交叉"并蒂圈"。在○BCX外进行A与D二色互换，打破○BDX，X的5个邻区呈双D夹C图形。（如连C……B，为不可行，可控换色后将形成○BDX四色可解圈）。

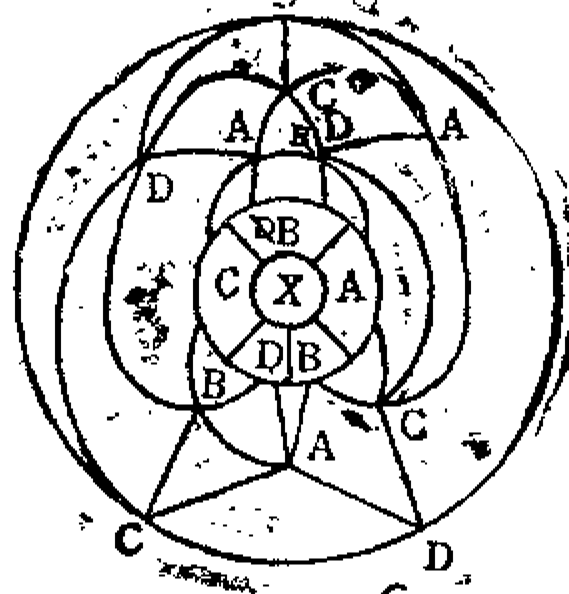
第八步（见图26），从C（V_2）始，已连接成○CAX和形成○CBX与○CAX交叉"并蒂圈"。在○ACX中进行D与B二色互换，打破○CBX，X的5个邻区呈双B夹A色型。

第九步（见图27），从A（V_3）始，使A—D通过线路未定地带连接已有的D—A成○ADX，形成○ACX与○ADX交叉"并蒂圈"。在○ADX中进行B与C二色互换，打破○ACX，X的5个邻区呈双C夹D色型。



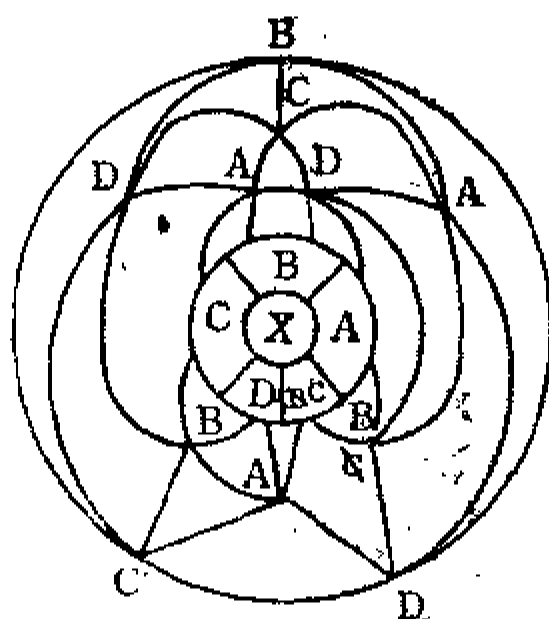
（第七步）

图 25



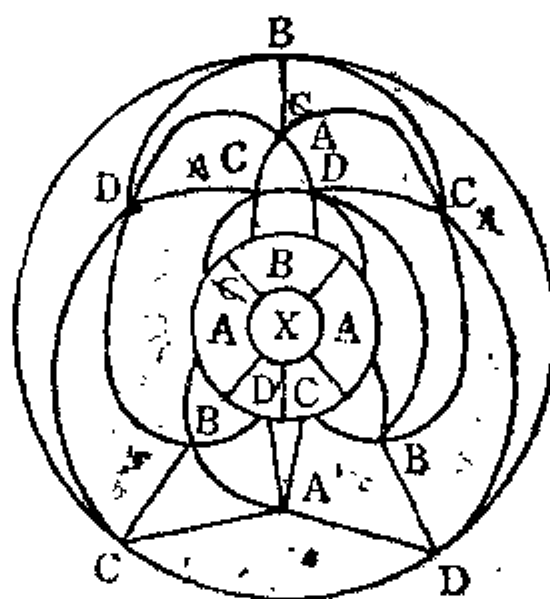
（第八步）

图 26



（第九步）

图 27



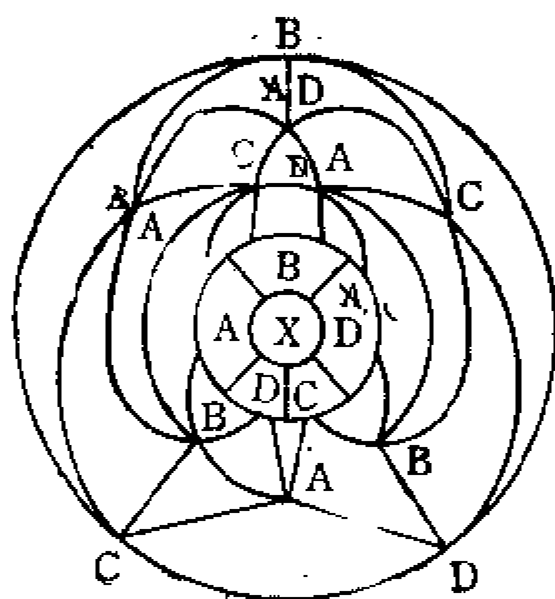
（第十步）

图 28

第十步（见图28）：从D（V_4）始，已连接成○DBX和形成○DAX与○DBX交叉“并蒂圈”。在○DBX中进行C与A色二互换，打破○DAX，X的5个邻区呈双A夹B色型。

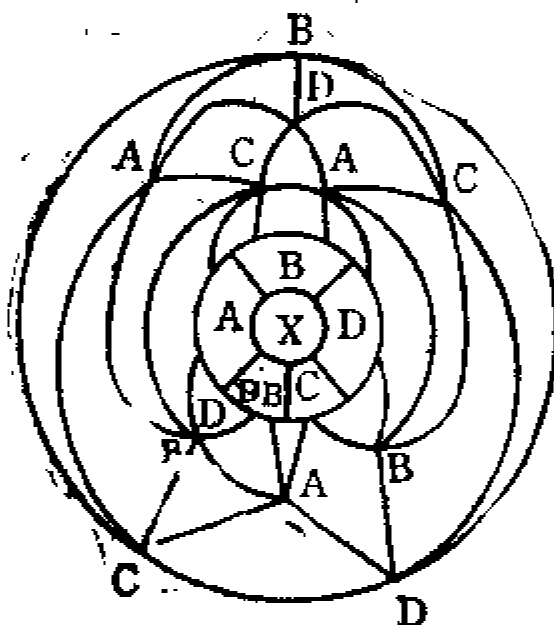
第十一步（见图29）：从B（V_1）始，使B—C通过线路未定地带与B—C连接成○BCX和形成○BDX与○BCX交叉“并蒂圈”。在○BCX中进行A与D二色互换，打破○BDX，X的5个邻区呈双D夹C色型。

第十二步（见图30）：从C（V_3）始，已连换成○CAX和形成○CBX与○CAX交叉“并蒂圈”。在○CAX中进行D与B二色互换，打破○CBX，X的5个邻区呈双B夹A色型。



（第十一步）

图 29

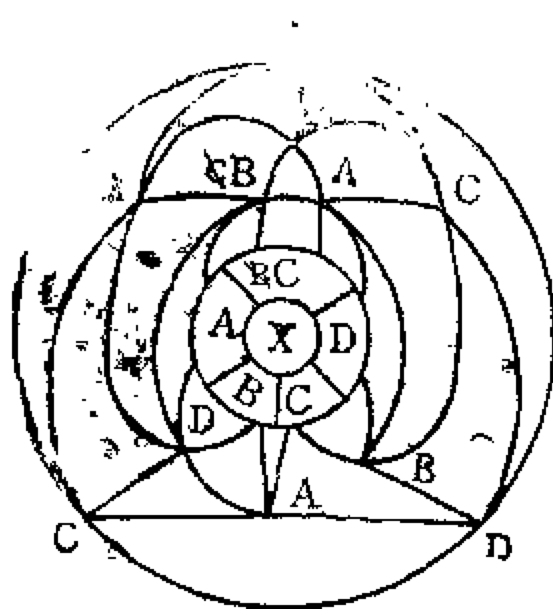


（第十二步）

图 30

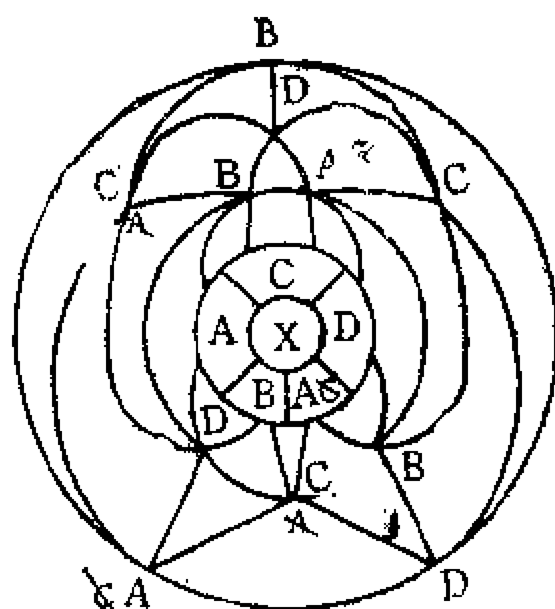
第十三步（见图31）：从A（V_5）始，已连接成○ADX和形成○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”。在○ADX中进行B与C二色互换，打破○ACX，X的5个邻区呈双C夹D色型。

第十四步（见图32）：从D（V_2）始，已连接成○DBX和形成○DAX与○DBX交叉“并蒂圈”。在○BDX外进行C与A二色互换，打破○DAX，X的5个邻区呈双A夹B色型。



（第十三步）

图 31

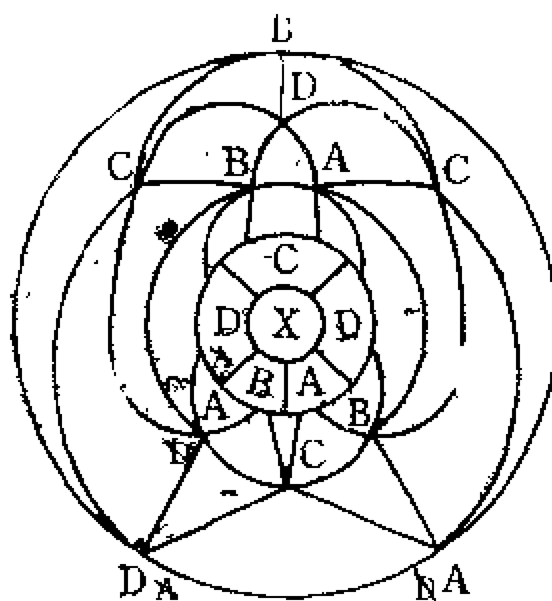


（第十四步）

图 32

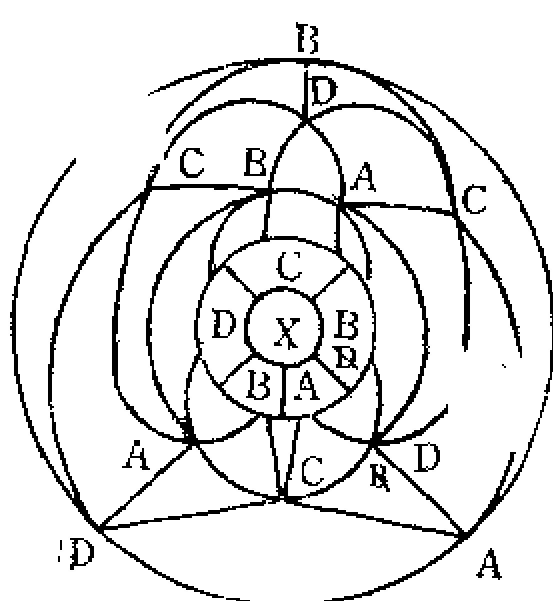
第十五步（见图33）：从B（V_4）始，使B—C通过线路未定地带连接B—C成○BCX，形成○BDX与○BCX交叉"并蒂圈"。在○BCX外进行A与D二色互换，打破○BDX，X的5个邻区呈双D夹C色型。

第十六步（见图34）：从C（V_1）始，已连接成○CAX和形成○CBX与○CAX交叉"并蒂圈"。在○ACX中进行D与B二色互换，打破○CBX，X的5个邻区呈双B夹A色型。



（第十五步）

图 33

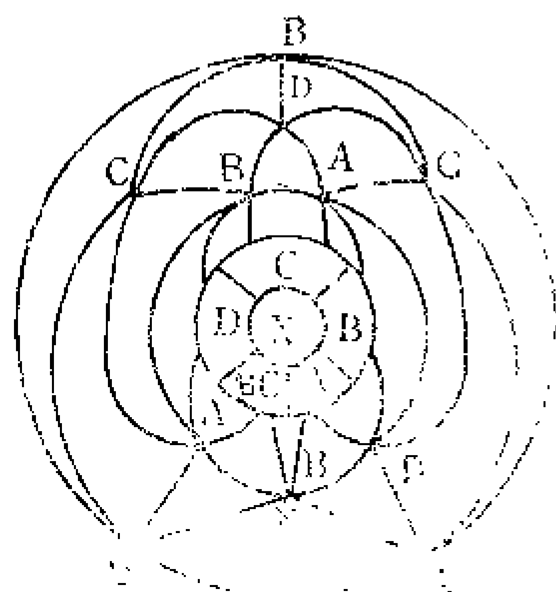


（第十六步）

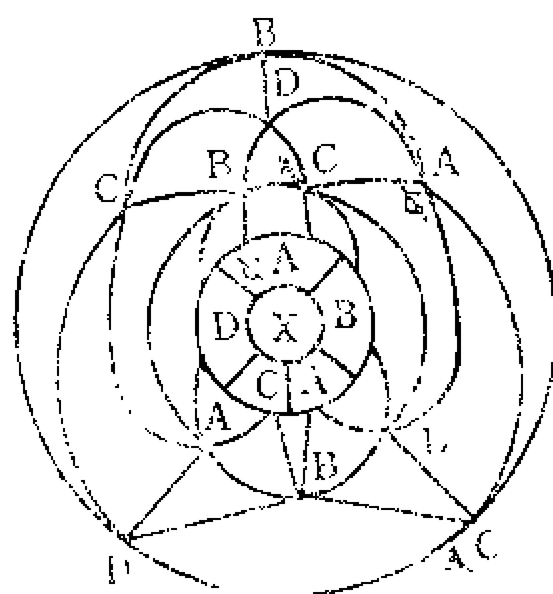
图 34

第十七步（见图35）：从A（V_3）始，已连接成○ADX和形成○ACX与○ADX交叉“并带圈”。在○ADX中进行B与C二色互换，打破○ACX，X的5个邻区呈双C夹D色型。

第十八步（见图36）：从D（V_5）始，已连接成○DBX和形成○DAX与○DBX交叉“并带圈”。在○DBX外进行C与A二色互换，打破○DAX，X的5个邻区呈双A夹B色型。



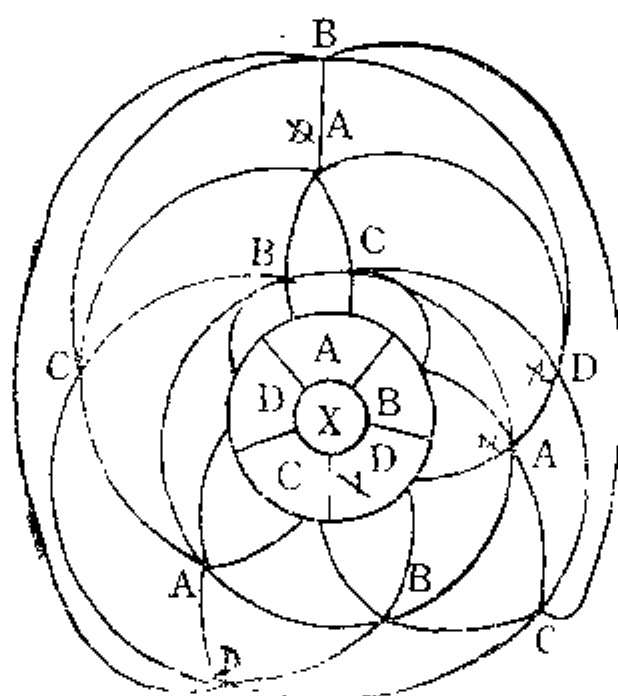
（第十七步）
图 35



（第十八步）
图 36

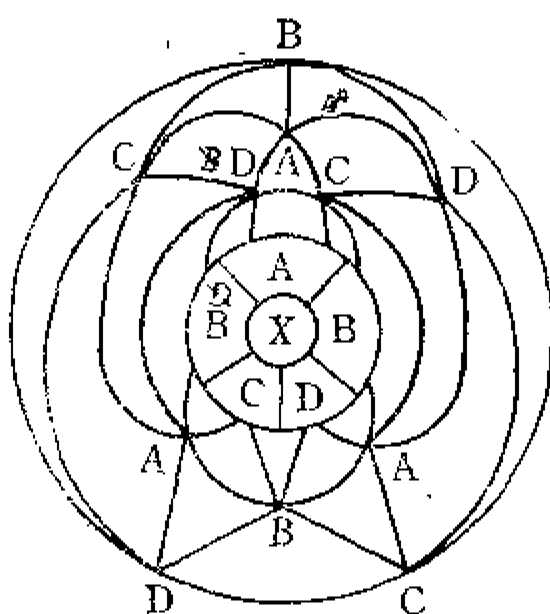
第十九步（见图37）：从B（V_2）始，已连接○BCX和形成○BDX与○BCX交叉“并带圈”。在○BCX中进行A与D二色互换，打破OBDX，X的5个邻区呈双D夹C色型。

第二十步（见图38）：从C（V_4）始，已连接成○CAX和形成○CBX与○CAX交叉“并带圈”。在○CAX中进行D与B二色互换，打破○CBX，X的5个邻区回复初始时的双B夹A色型。



（第十九步）

图 37



（第二十步）

图 38

演绎至第二十步，X区的各邻区完全恢复到原来的填色。○ACX与○ADX也都恢复到原状。全方位循序连锁进行四圈可控换色演绎至此结束。如果再继续照旧演绎，二十步为一轮，只能按这二十步的线路无限重复下去。

至此，我们可以得出结论：到第二十步为止，已经得出了二阶全方位连锁可控换色调整的四色不可解线路集合。我们称这个第二十步的线路图，为○ACX、○ADX、○BCX、○BDX四圈可控换色演绎的四色不可解线路基准图N，或二阶四色不可解线路集合基准图N（简称二阶图N）。这20步和继续进行新一轮的20步，也就是交叉"并蒂圈"的全方位连锁转换。

在这个二阶图N中，每条二色通道都是四色不可解线路，绝不允许相对立的二色通道从中穿过，否则即为四色可解。因为从上述20步实际演绎过程中得知，如果允许相对立的二色通道穿

过，就必定形不成二阶四色不可解线路集合，在上述20步的相应步骤中就已出现四色可解圈，变为四色可解了。这20步演绎，就是前述定理7的具体实际证明。

至于在第二步中，B—D如果走图的右外侧，演绎的结果相同，为拓扑同构图，只需将右外侧的B—D线移到左外侧即可。

至于在上面诸图中出现两条二色通道的非交叉粘连，均与这些图相等。粘连点与由此增加的线路上的色点为非基本结点和过渡色点（见图39）。

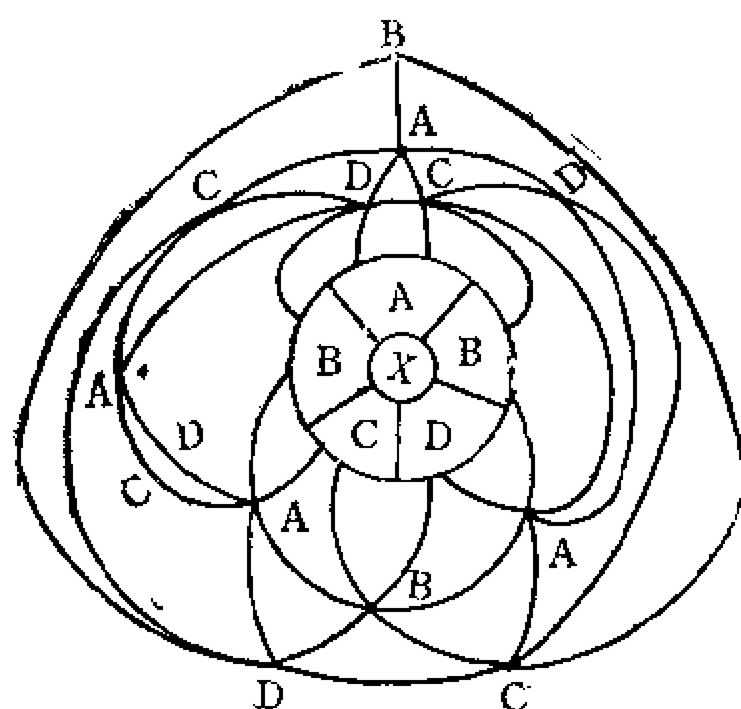


图 39

现将上述20步演绎及填色变化并为一个图，将X的5个邻区及其线路网络上各基本结点换色的顺序从左至右排列，则如图40所示。

下面再做一系列定型化的规定：

a、从二阶演绎开始的第一个“并蒂区”起，按顺时针方向依次规定X的5个邻区的确定位置：V_1，V_2，V_3，V_4，V_5。

b、二阶演绎中二色线路的选定规则：遇有两条或两条以上可供选择的线路时，一般走最靠近X邻区的最小线路；当某一线

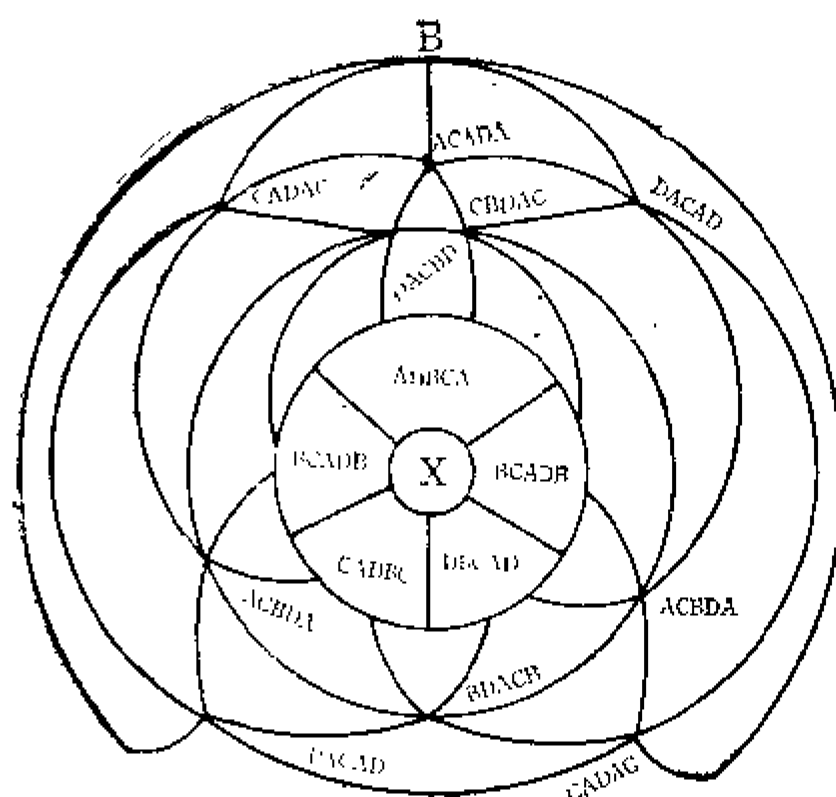
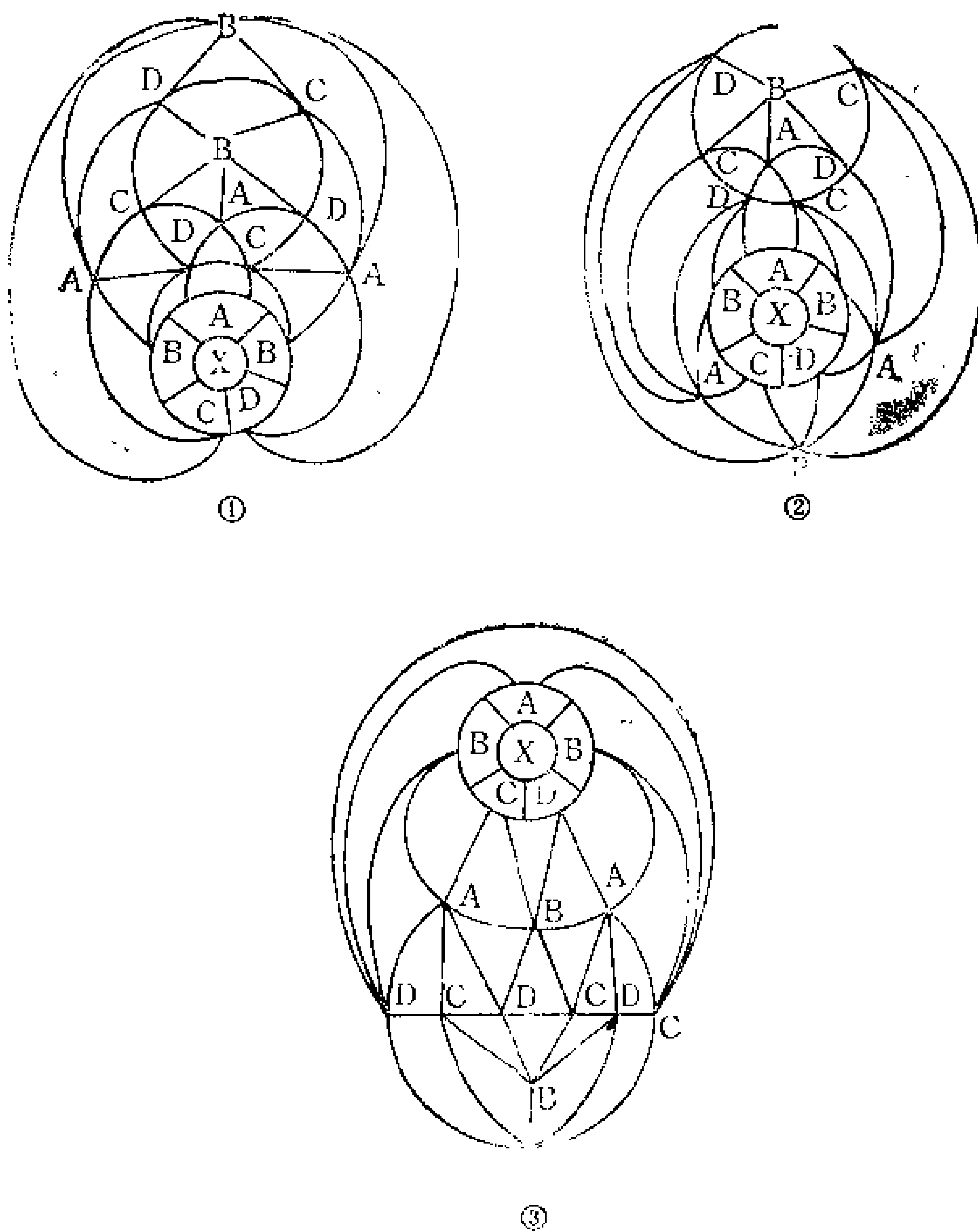


图 40

路穿过另一线路时必有一交点(被穿过的线还会出现一新色点)，以后过此线连接新的线路时凡能经此交点或新色点的都应过此交点或新色点（受制约隐线限制不能过原交点的为复式图）；凡已形成二色通道的，其后在演绎中都应走已有的二色通道。

c、规定二阶四色不可解线路集合的统一图形模式：统一采用上述二阶图N这种围绕X的邻区由不同二色通道组成的两条线圈以及将极点（T）置于图形上方的点线布局。我们称这种点线布局的模式为模式N。在图形模式上，不采用其他拓扑同构图。在各种实际图形中，遇有与此拓扑同构的线路和图形，均转到模式N的点线布局上来。

在其他拓扑同构的模式中（填色在演绎中可以变化），比较典型的如图41所示。



① ② ③

图 11

d、称二阶四圈可控换色演绎的第二十步图形（包括点、线和填色）为二阶四色不可解线路集合基准图N。其在方位上有变化的同色同构图，称为与二阶图N同模式的同色同构图。

e、比照二阶图N，将X的5个邻区及其外二色通道网络上的

11个基本结点分别定名为（见图42）：

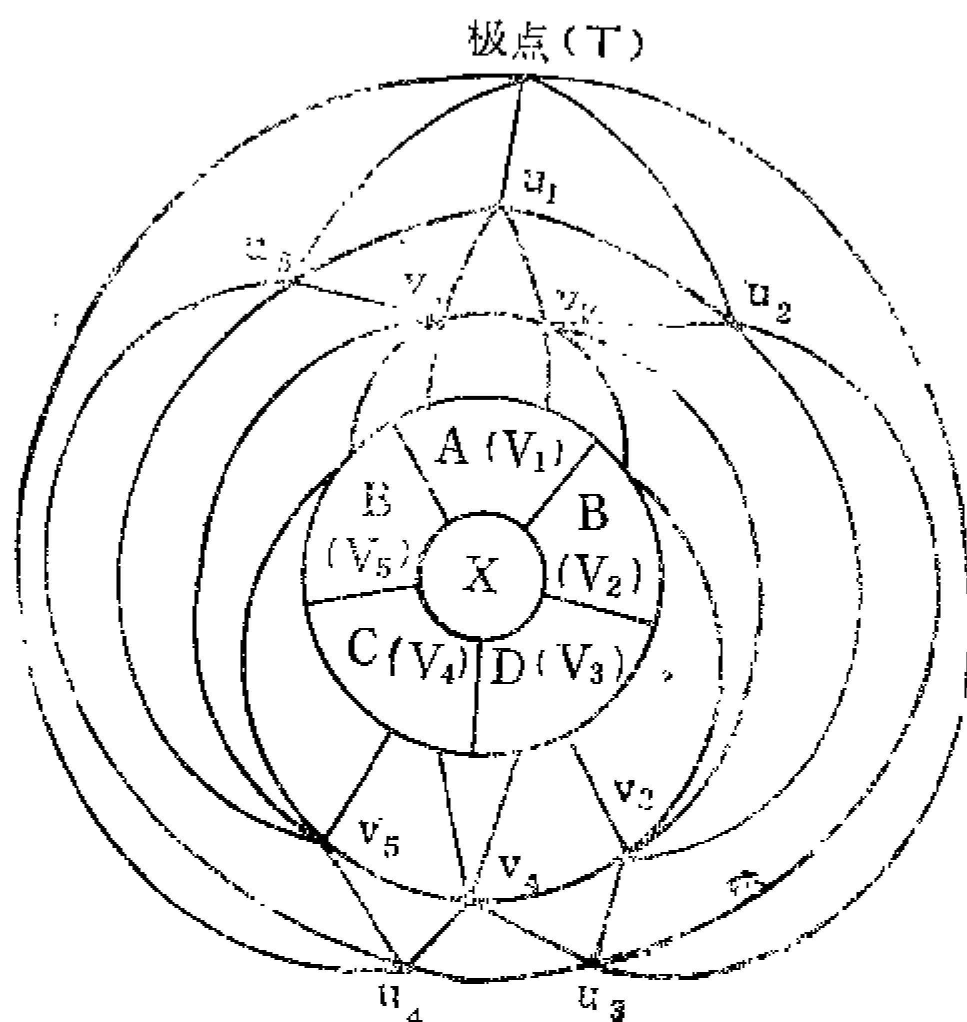


图 42

两结点之间的二色通道，为了标明位置可记为诸如 $v_1—u_5$（简作 v_1u_5）。

$v_1v_2v_3v_4v_5$ 称为Ⅰ线。X的5个邻区至Ⅰ线的中间地带称为Ⅰ区。$u_1u_2u_3u_4u_5$ 称为Ⅱ线。Ⅰ线至Ⅱ线为Ⅱ区。Ⅱ线以外地带称为Ⅲ区。X邻区至Ⅰ线基本结点的二色通道为 L_1，Ⅰ线基本结点至Ⅱ线基本结点的二色通道为 L_2，Ⅱ线基本结点至极点（T）的二色通道为 L_3。

如前所示，利用1—n个二色圈依序进行可控换色演绎和形

成新的线路，可统称四色演绎。在二阶四圈可控换色的四色演绎中，交叉“并蒂圈”共有四组，○ACX与○ADX为一组，○BCX与○BDX为一组，○CAX与○CBX为一组，○DAX与○DBX为一组。每一组的交叉“并蒂区”在X的5个邻区中都要各出现一次。导致交叉“并蒂圈”循序转移的可控换色始发区，如第一步的B（V_2），在X的5个邻区中都要各出现4次。因此，5×4＝20，共有20个分步图。如果我们在二阶图N中进行新一轮的二十步演绎，就会看得很清楚：作为演绎过程中的二阶四色不可解线路集合的子图，这20个分步图分别表现为：

a、以○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”进行可控换色演绎的分步图为①⑤⑨⑬⑰，其换色前的拓扑图形为图43（未标明隐线和由隐线转化而成的显线，下同）：

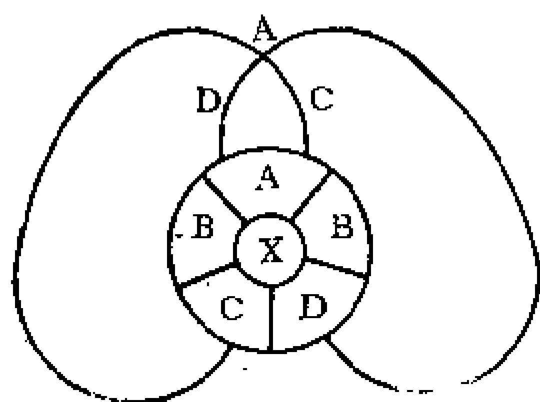


图 43

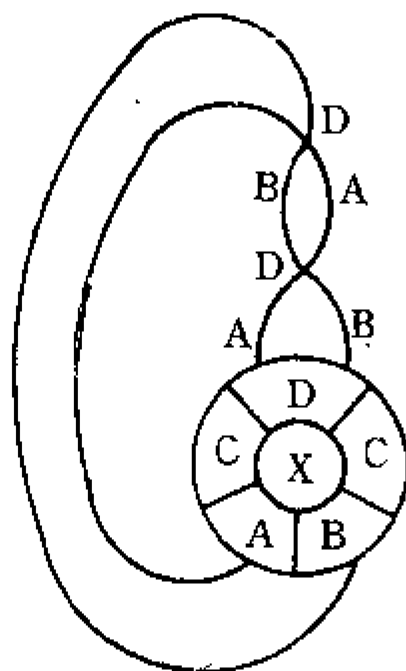


图 44

包括这类子图的二阶四色不可解线路集合，称为A类图。

b、以○DAX与○DBX交叉“并蒂圈”进行可控换色演绎的分步图为②⑥⑩⑭⑬，其换色前的拓扑图形为图44：

包括这类子图的二阶四色不可解线路集合称为B类图。

c、以○BDX与○BCX交叉“并蒂圈”进行可控换色演绎的

分步图为③⑦⑪⑮⑲，其换色前的拓扑图形为图45：

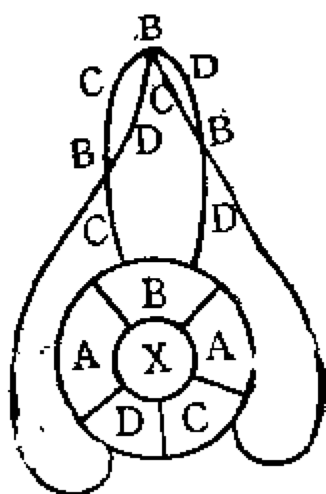


图 45

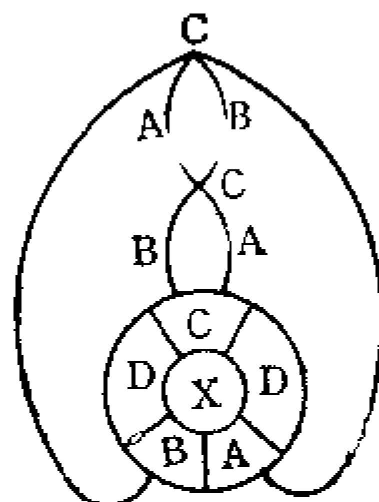


图 46

包括这类子图的二阶四色不可解线路集合，称为C类图。

d、以○CBX与○CAX交叉"并蒂圈"进行可控换色演绎的分步图为④⑧⑫⑯⑳，其换色前的拓扑图形为图46。

包括这类子图的二阶四色不可解线路集合称为D类图。

在X区的5个邻区为双B夹A型中，以上四个图形称为○ACX、○ADX、○BCX、○BDX四圈换色演绎的四色不可解线路集合中的双B夹A、双C夹D、双A夹B、双D夹C的拓扑图形（其中B类图和D类图的上述子图，在拓扑上为异色同构）。

A、B、C、D四类图中，每一类图在分步图中所形成的二色通道虽然逐步由简到繁，但在实质上是由隐性逐渐变为显性。放在二阶图N中来观察和演绎，可看出每类图各自都是同构的。

当然，对二阶图N也可以作这样的说明：X区的5个邻区，每个邻区均可填四色中的任何一色，即可有4次填色调整，5个邻区共可有20次填色调整。上述20步四色演绎中，严谨而巧妙地、有序地使X的每个邻区的填色都变换4次，在每次填色变换中都摒除四色可解的线路图形而采取了四色不可解的线路图形，将其连锁为一体，进行全方位的有序推移，从而形成了○ACX、○ADX○BCX、○BDX四圈可控换色演绎的四色不可解线路集合。

需要不厌其烦地反复强调的是，二阶四色演绎的实际演绎过程已经证明了：在这个二阶四色不可解的线路集合基准图N中，每一条二色线路都是绝对不能打破的。如果打破了，在演绎中就成为四色可解图形。线路网络中的各结点，在演绎过程中可于二色圈内或圈外变换填色，但线路网络的拓扑结构不能变。

下面，再从线路网络上作一点论证。在二阶四色不可解的线路集合图N中，其始发图形（即一阶四色不可解线路图M）为○ACX与○ADX二圈可控换色的四色不可解线路图形。那么，从线路集合的拓扑结构来说，要使X区的5个邻区都采取○ACX与○ADX二圈可控换色的四色不可解线路图形（包括一阶图M中使四色不可解的隐线，这些隐线在二阶四色演绎过程中均变为显线），并把它们的线路合并在一起成为共同线路，其拓扑结构为（见图47）：

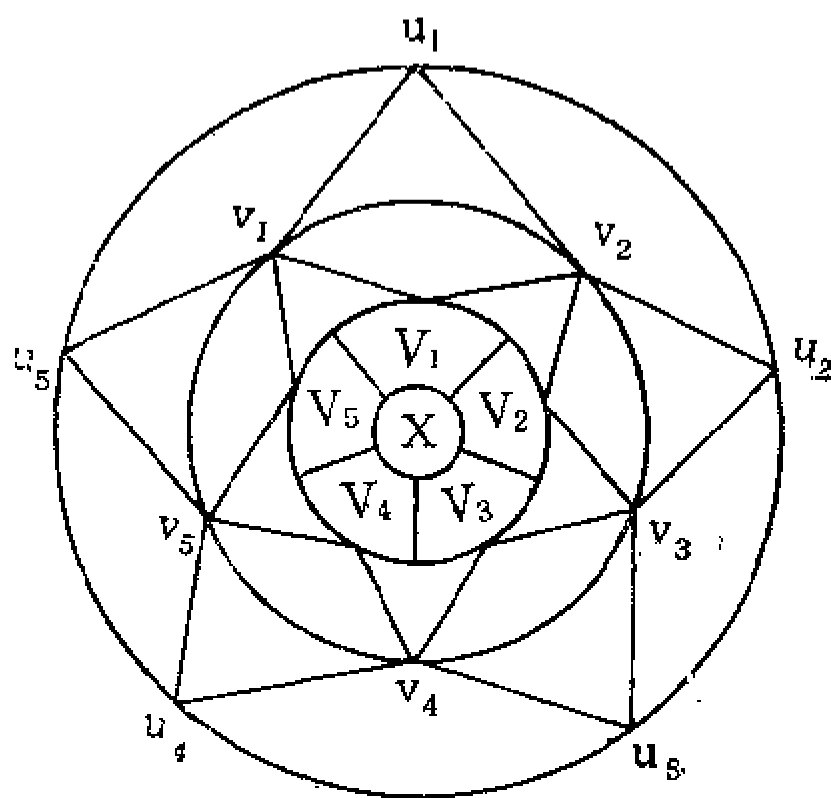


图 47

这个拓扑结构，也就是X区的5个邻区孤立地分别采用○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”可控换色的四色不可解拓扑线

路集合。因此○ACX、○ADX、○BCX、○BDX四圈可控换色的四色不可解线路集合必须将它包含在内(作为一个子图)。由于○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”全方位连锁转换过程是○DBX、○BCX、○CAX、○ADX输番相继出现的过程，需要有○DBX、○BCX作为中介，因此，在它的外面一定有一个极点B，通过极点B在外方架起连接D—B与B—C线路的中转站，分别同这个拓扑线路网络外圈（Ⅱ线）的5个网络结点（u_1，u_2，u_3，u_4，u_5）相连，以形成在○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”连锁转换的演绎过程中为使四色不可解所需要的○DBX和○BCX。在这个过程中，因B与C以及B与D的二色互换均在这个拓扑线路集合的中的○ADX或○ACX内进行，B色不可能出现在线路集合的外圈（Ⅱ线）网络结点上，因此在其外连接D—B与B—C线路的网络结点(极点)必然是B色，而且在整个演绎过程中不会改变为其他颜色（至于在○ADX、○ACX、○CDX三圈可控换色的演绎中，属另外一种情况，后面再涉及）。这样，采取全方位连锁转移的○ACX、○ADX、○BDX、○BCX四圈可控换色演绎，其拓扑线路网络必然成为二阶四色不可解线路集合的线路网络（见图48）。

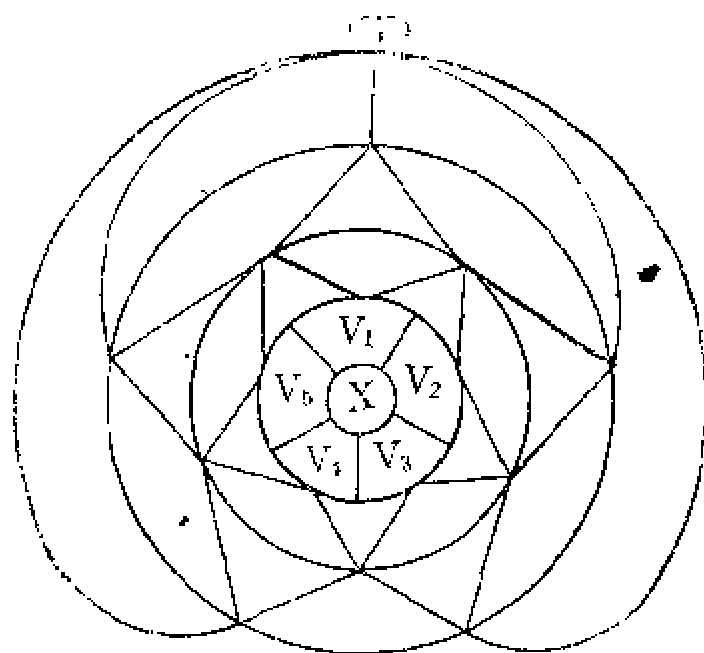


图 48

破坏了这个拓扑线路网络及其点线关系（不包括线路粘连，线路粘连问题在后面专门论述），在二阶四色演绎中一定四色可解。如前所述，我们称这个线路网络为模式N，同它的拓扑同构图以示区别。对二阶和三阶的四色演绎，我们均选定在模式N中进行，能更清楚地体现出交叉"并蒂圈"全方位连锁转换的关系。

2.三圈全方位连锁可控换色对二阶四色不可解线路集合基准图N的验证

在二阶○ACX与○ADX交叉"并蒂圈"的始证图中，如不在○ADX中进行B与C二色互换，并按上述20步进行演绎，而是在○ACX外进行B与D二色互换（当然也可以在○ADX外进行B与C二色互换），其后按照这种办法循序进行演绎，每一步均使X的5个邻区中有相邻的两个区互换填色，则同样可以得到与前述完全相同的二阶四色不可解线路集合基准图N。这种演绎由于X的5个邻区始终有两个填B色区，在演绎中共有双B夹A、双X夹C和双B夹D三种色型，因此是在○ACX、○ADX和○CDB三个圈内或圈外通过另二色的互换进行的。为了便于在演绎中排除四色可解图形，并对前述的四圈可控换色演绎进行验证，试在二阶四色不可解线路集合基准图N中进行这种演绎：

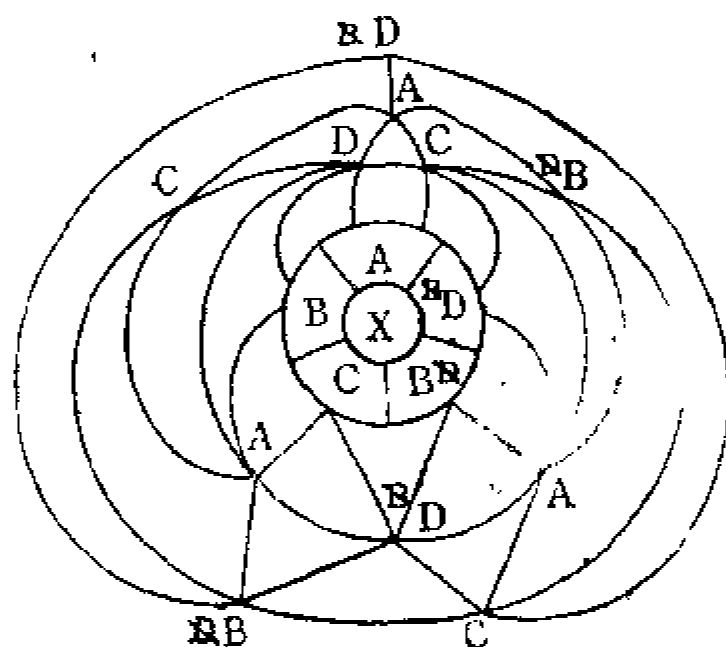


图 49

第一步（见图49）：在○ACX外进行B与D二色互换，打破○ADX，形成○CAX与○CDX交叉“并蒂圈”。

第二步（见图50）：在○CDX外进行A与B二色互换，打破○CAX，形成○DCX与○DAX交叉“并蒂圈”。

第三步（见图51）：在○DAX中进行B与C二色互换，打破○DCX，形成○ADX与OACX交叉“并蒂圈”。

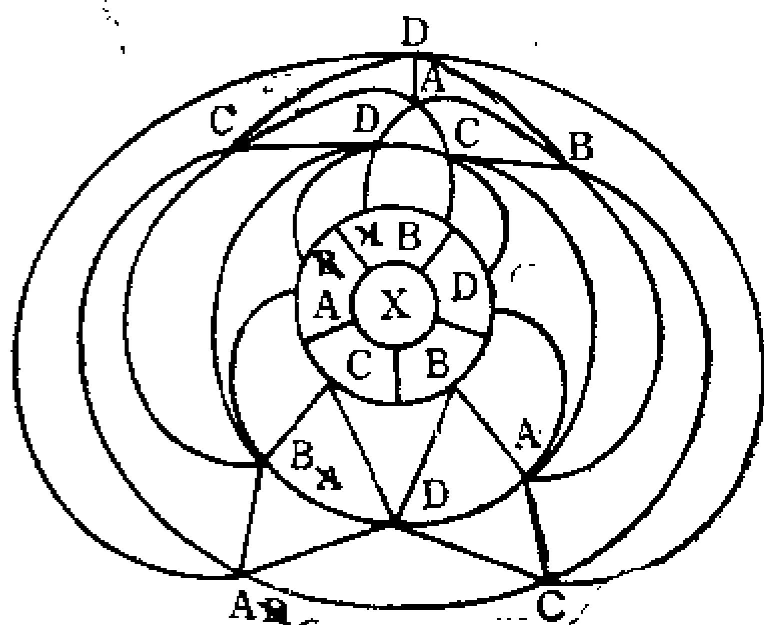


图 50

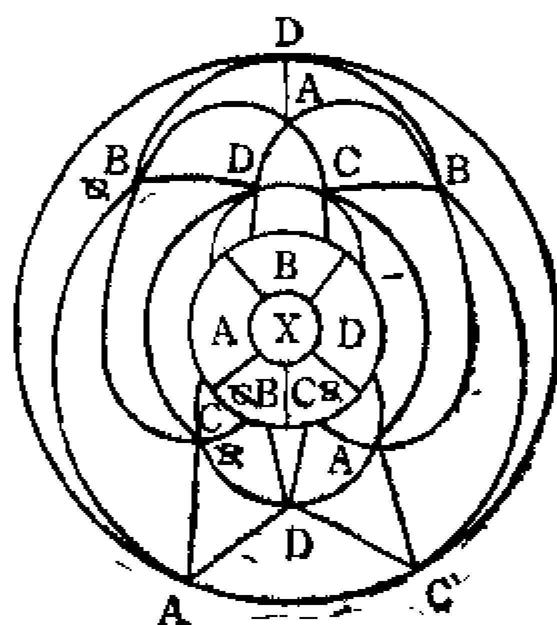
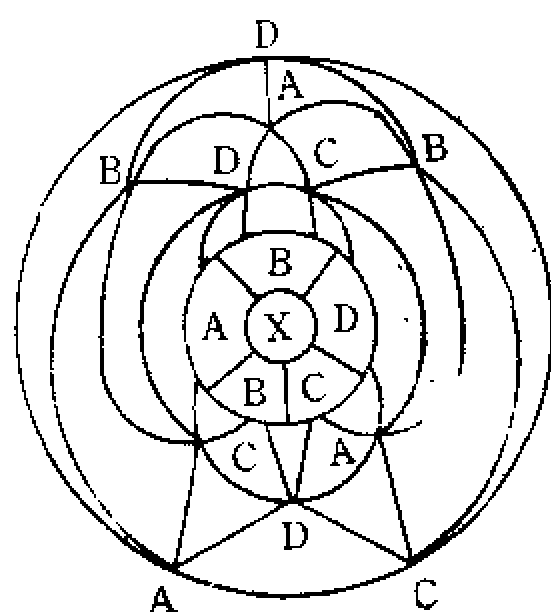


图 51

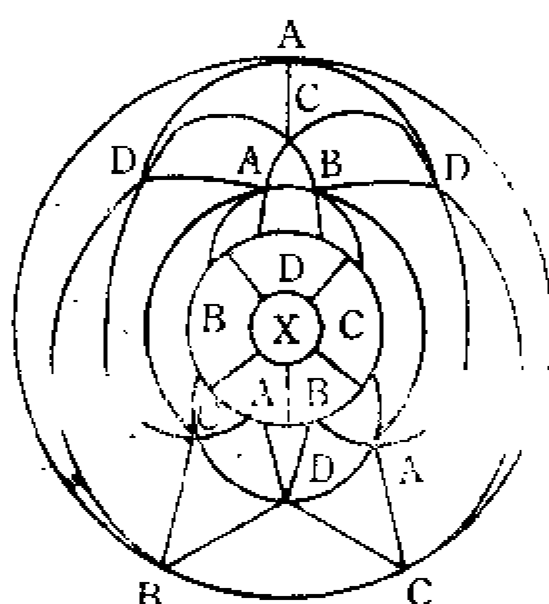
至此，X的5个邻区已在演绎中出现双B夹A色型，但其外各结点的填色不同于二阶图N。依此继续演绎下去，每3步X的5个邻区均出现一次双B夹A色型。另外，从第一步开始，每15步X的5个邻区的填色恢复到始发时双B夹A位置。每15步演绎称为一站，经过4站到第六十步时，全部填色回复到二阶四色不可解线路集合基准图N。

在各站中，X的5个邻区中双B夹A色型各图的填色情况如下（见图52的①—⑳分图）：

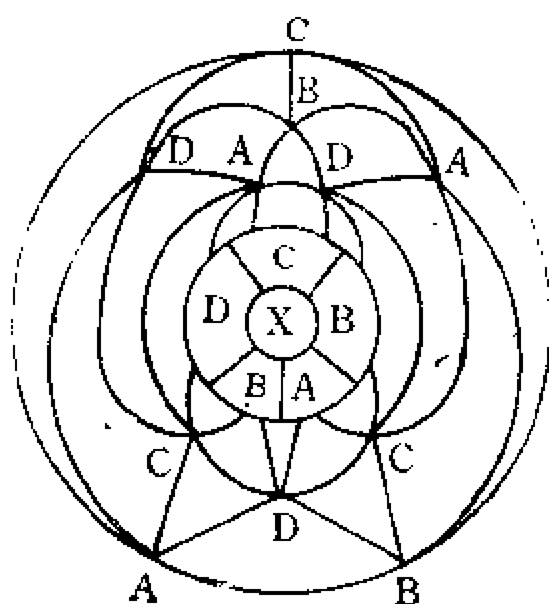
第一站：



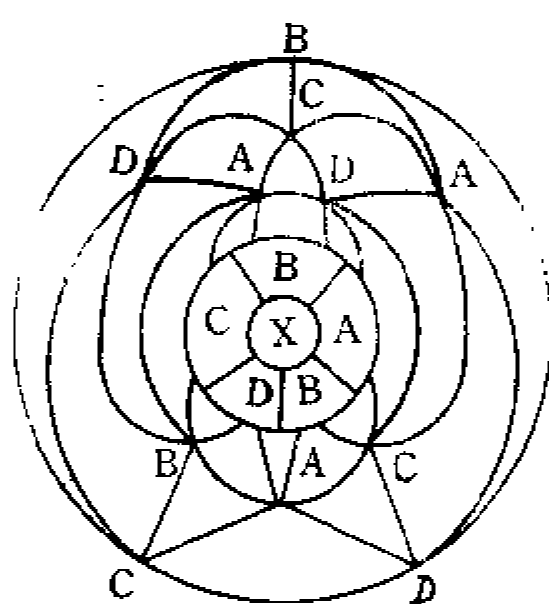
① 第三步



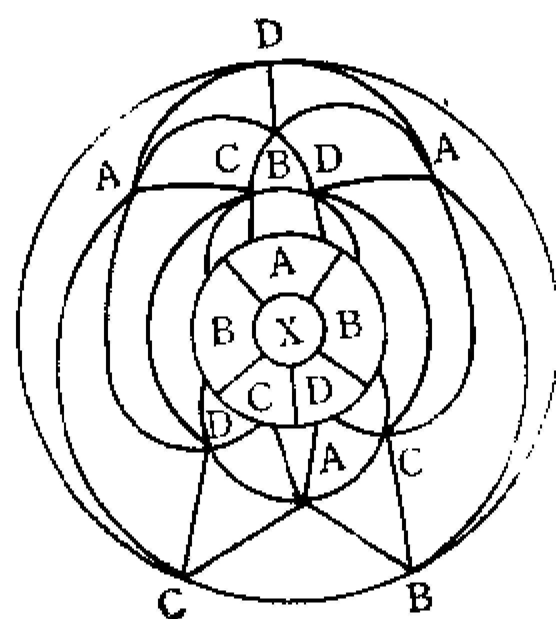
② 第六步



③ 第九步

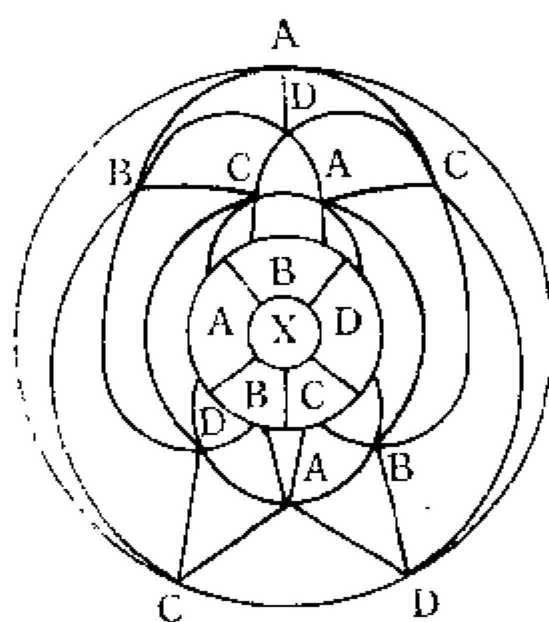


第十二步（拓扑还原）

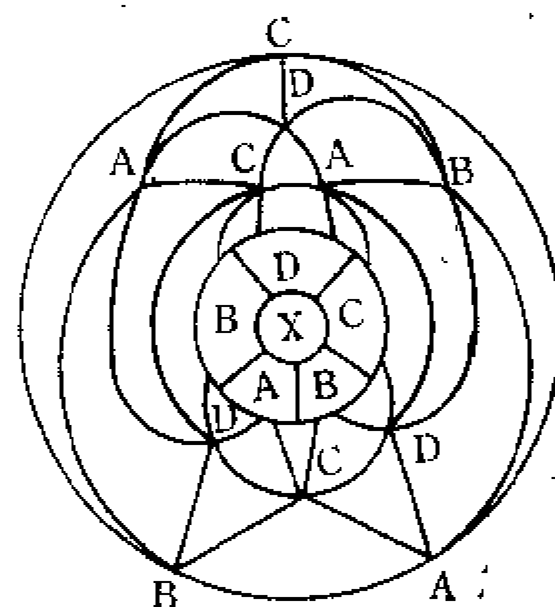


⑤ 第十五步

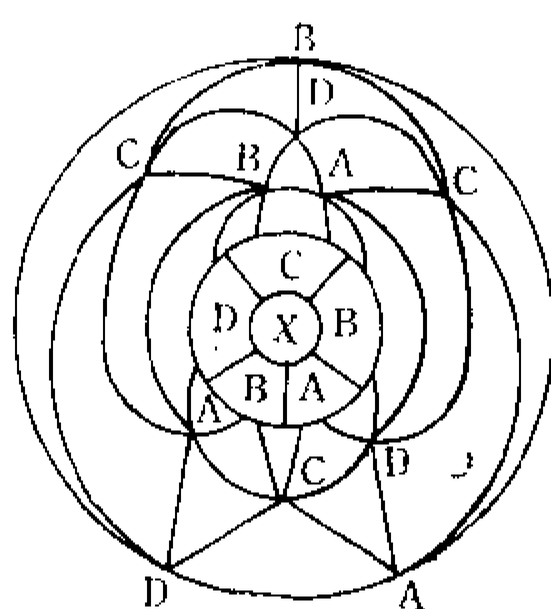
第二站：



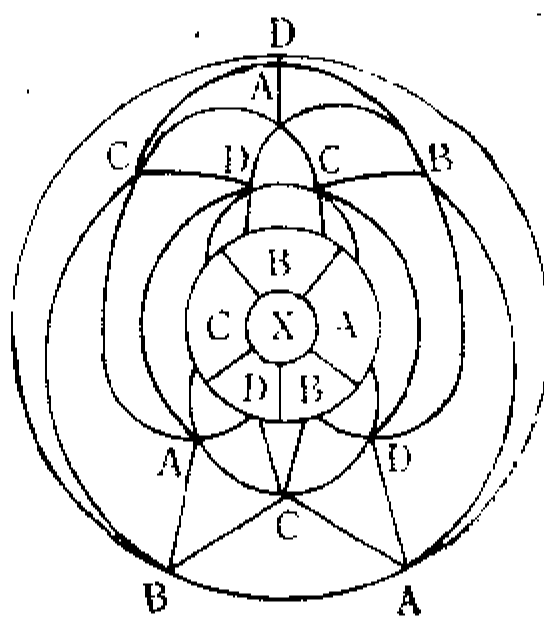
⑥ 第十八步



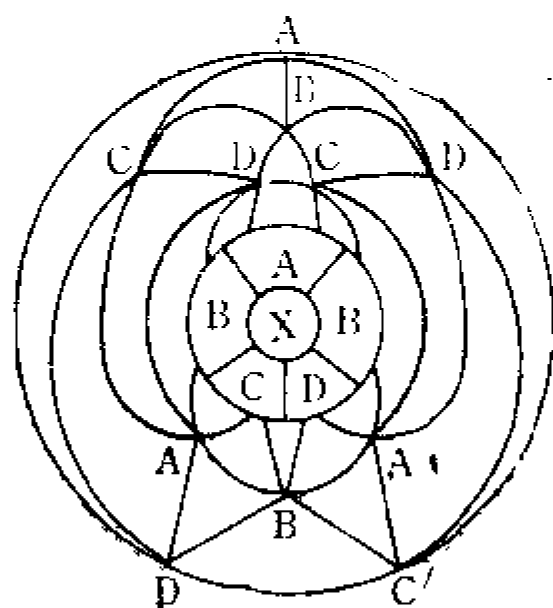
⑦ 第二十一步



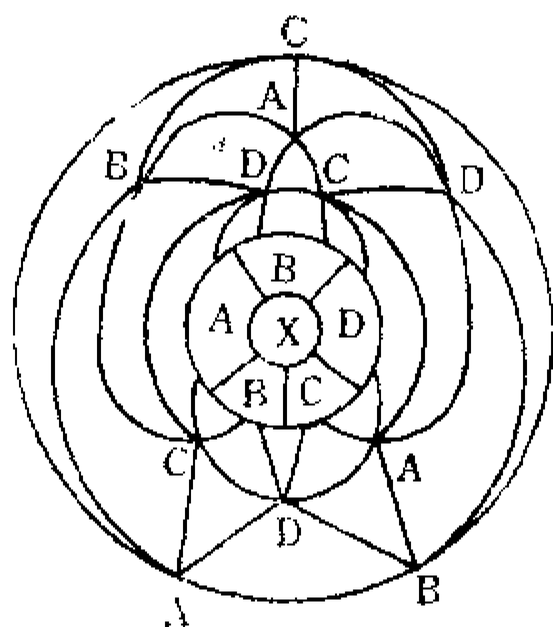
⑧ 第二十四步（扑拓还原）



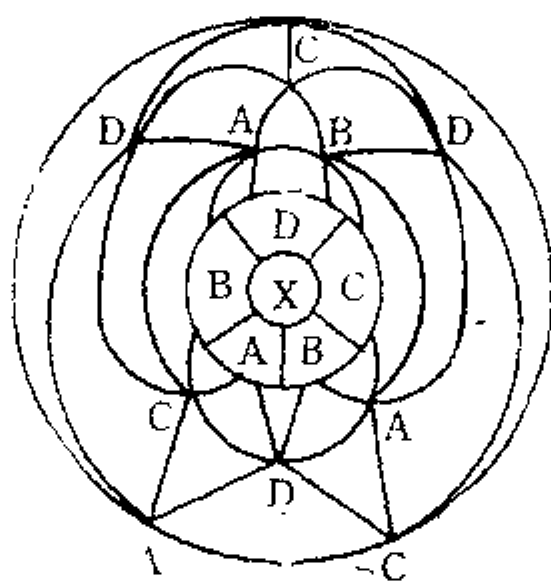
⑨ 第二十七步



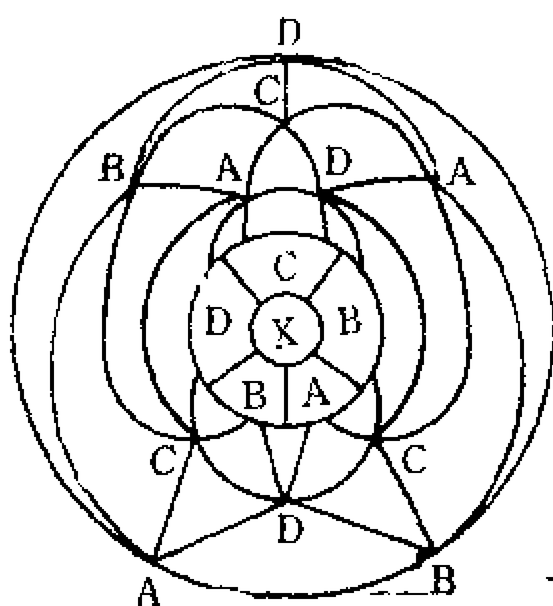
⑩ 第三十步



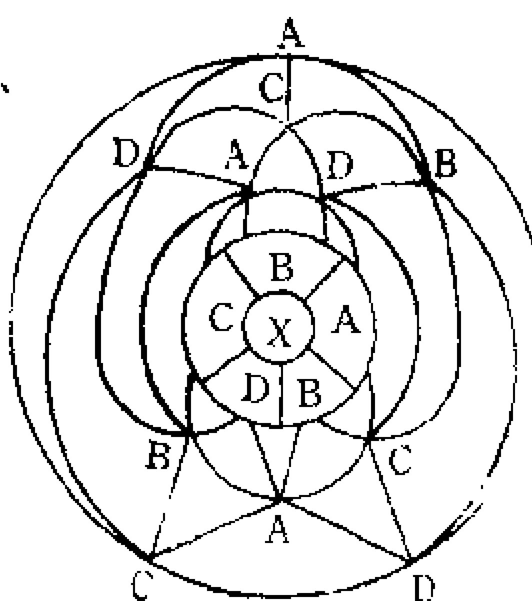
⑪ 第三十三步



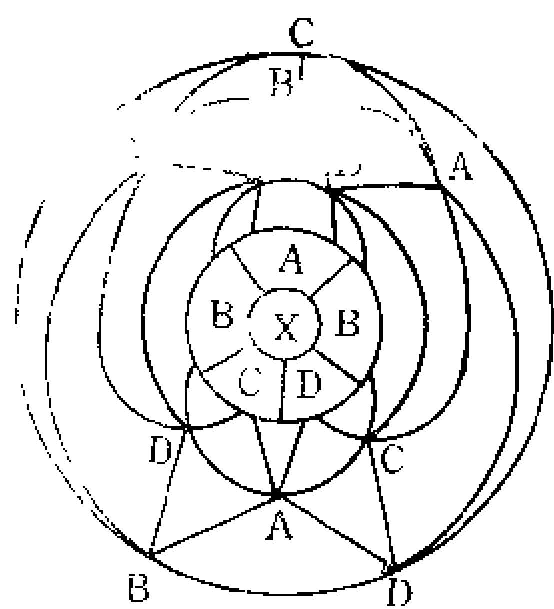
⑫ 第三十六步（扑拓还原）



⑬ 第三十九步

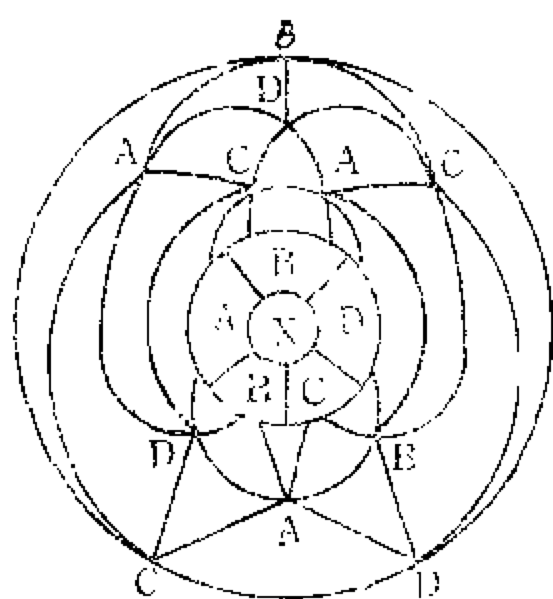


⑭ 第四十二步

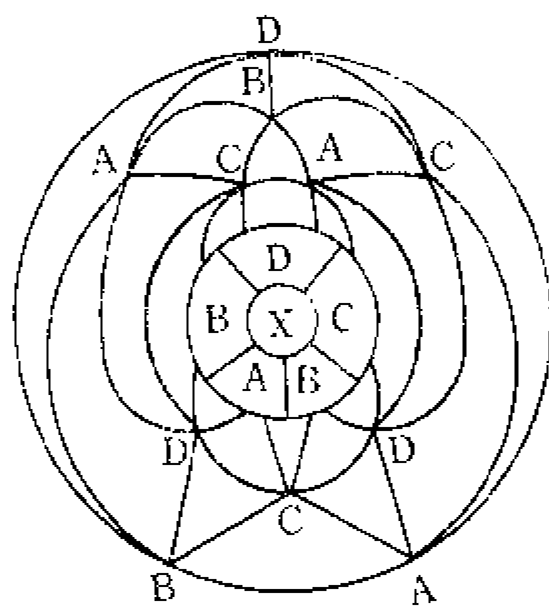


⑮ 第四十五步

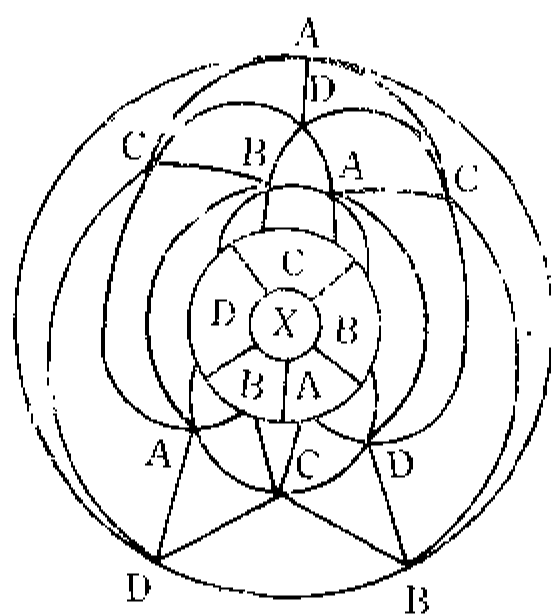
较简单：



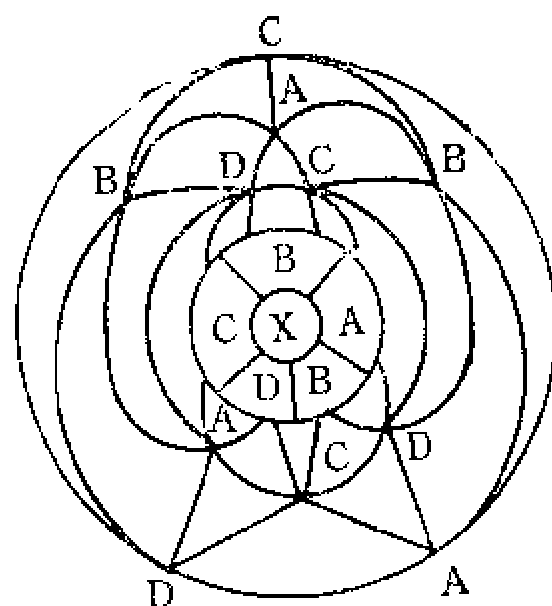
⑯ 第四十八步（拓扑还原）



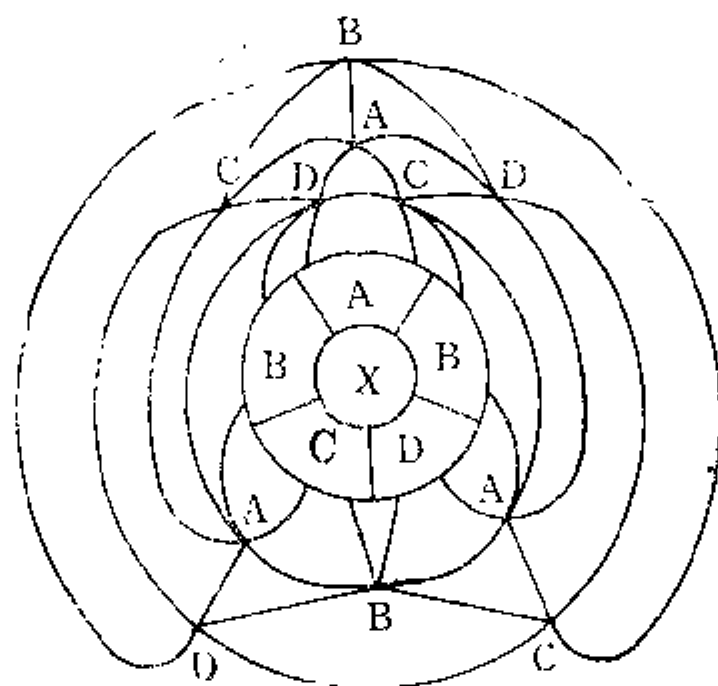
⑰ 第五十一步



⑱ 第五十四步



⑲ 第五十七步



⑳ 第六十步（全部还原）

图 52

以上各图共分4种：第一种，①第三步、⑤第十五步、⑨第

二十七步、⑬第三十九步、⑰第五十一步为相同拓扑填色。第二种，②第六步、⑥第十八步、⑩第三十步、⑭第四十二步、⑱第五十四步为相同拓扑填色。第三种，③第九步、⑦第二十一步、⑪第三十三步、⑮第四十五步、⑲第五十七步为相同拓扑填色。第四种，④第十二步、⑧第二十四步、⑫第三十六步、⑯第四十八步、⑳第六十步为相同拓扑填色。

第一种，取第一站⑤图（极点为D），依序进行○ADX、○DBX、○BCX、○CAX四圈圈内或圈外可控二色互换，至第二十步仍复原。因○BCX与○CAX均在Ⅱ线内，且A与D二色互换和B与D二色互换均在圈内进行，故换色不涉及极点D，极点D仅为○ADX和○DBX线路的中转站（见图53，填色变化按从左至右顺序排列，以下同）。

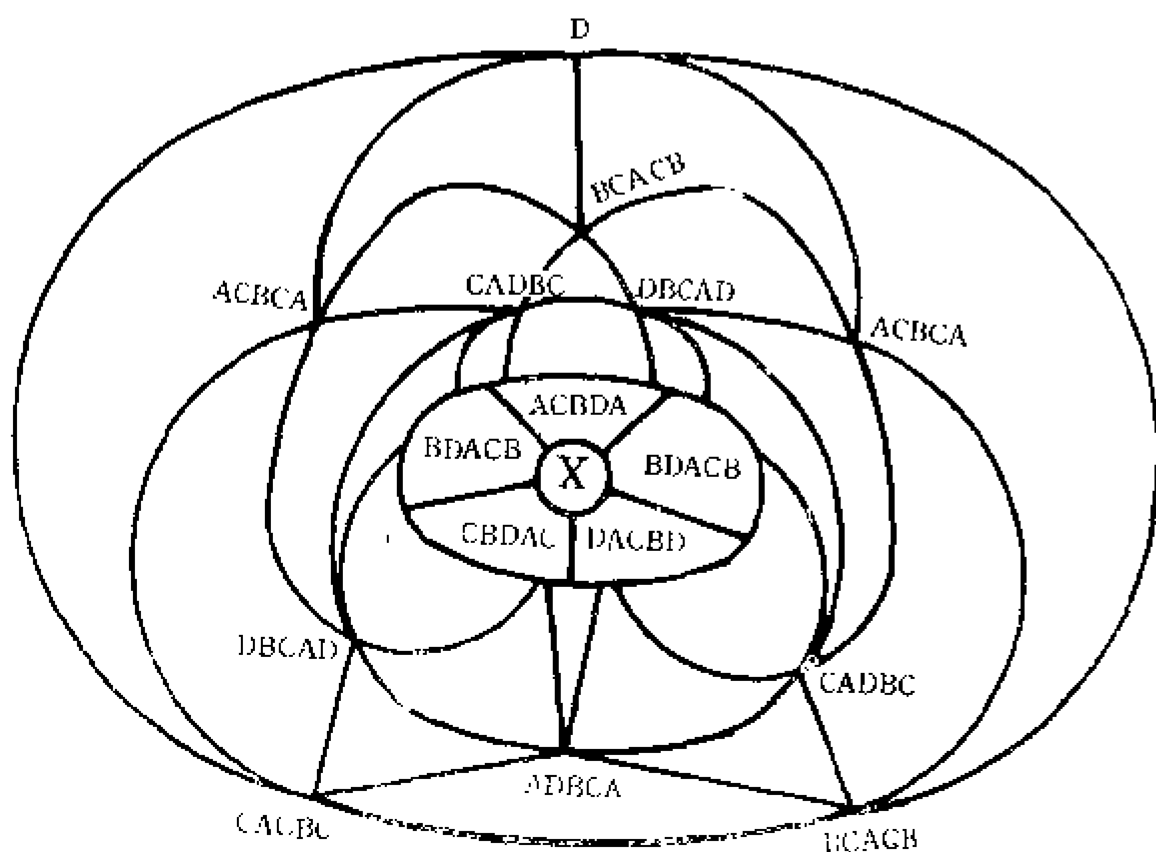


图 53

第二种，取第二站⑩图（极点为A），依序进行○ADX、○DBX、○BCX、○CAX四圈圈内或圈外可控二色互换，至第

二十步仍复原。因○DBX与○BCX均在Ⅱ线内，且C与A二色互换和A与D二色互换均在圈内进行，故换色不涉及极点A，极点A仅为○ADX与○CAX线路的中转站（见图54）。另，此图在○CD（$v_1v_2u_2u_3u_4u_6$）外进行A与B二色互换，即为二阶四色不可解线路集合基准图N。

图 54

第三种，取第三站⑮图（极点为C），依序进行○ADX、○DBX、○BCX、○CAX四圈圈内或圈外可控二色互换，至第二十步仍复原。因○ADX、○DBX均在Ⅱ线内，且B与C二色互换和C与A二色互换均在圈内进行，故换色不涉及极点C，极点C仅为○BCX和○CAX线路的中转站（见图55）。

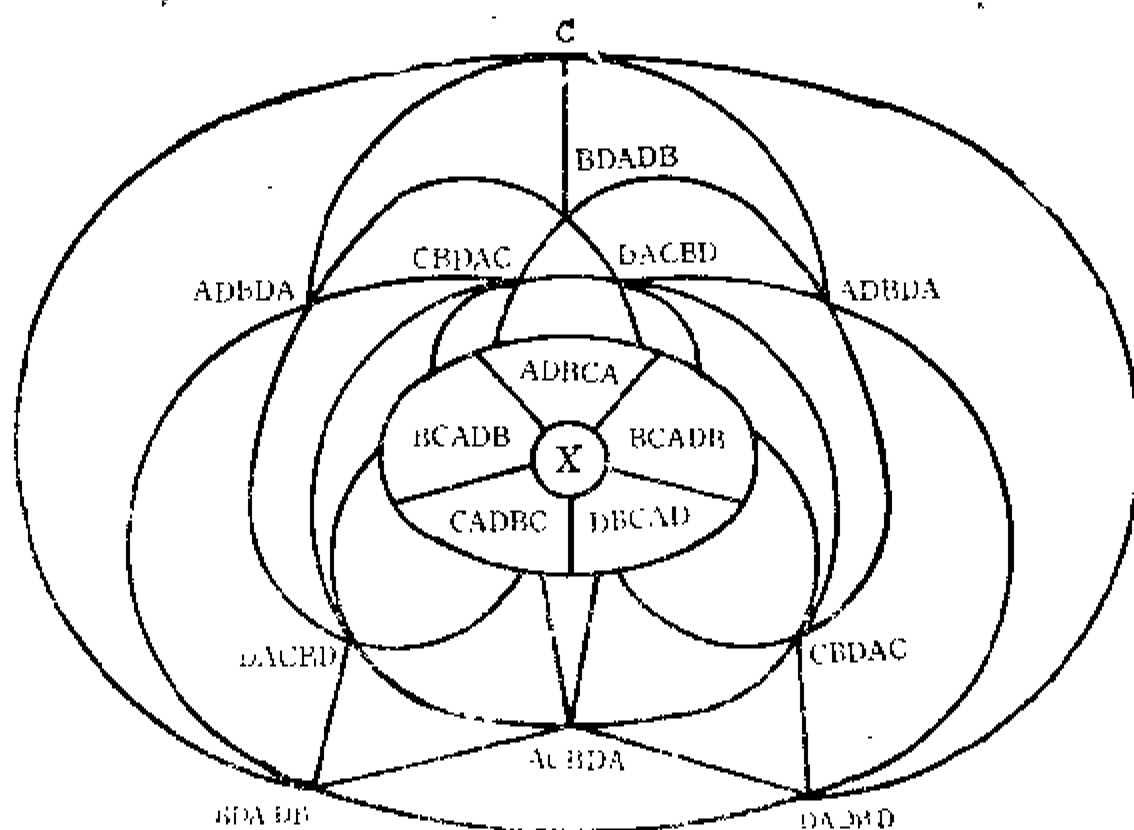


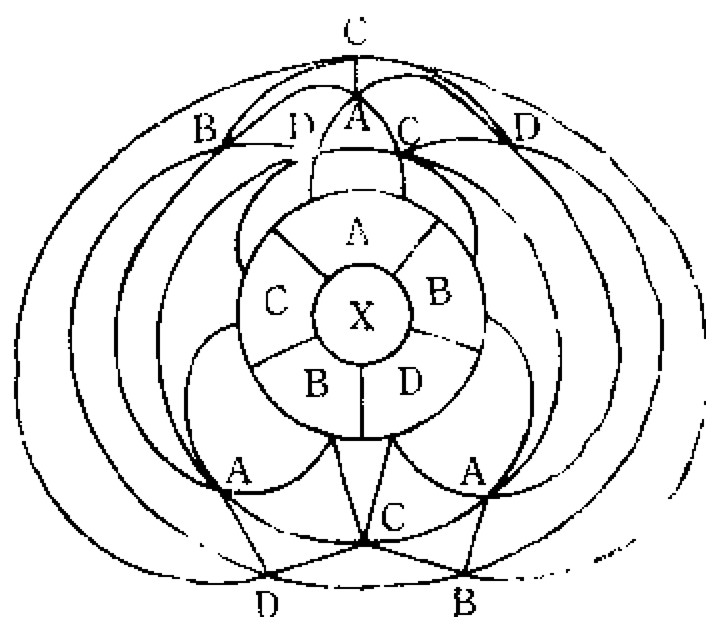
图 55

第四种，取第四站⑳图（极点为B），即二阶四色不可解线路集合基准图N。此处从略。

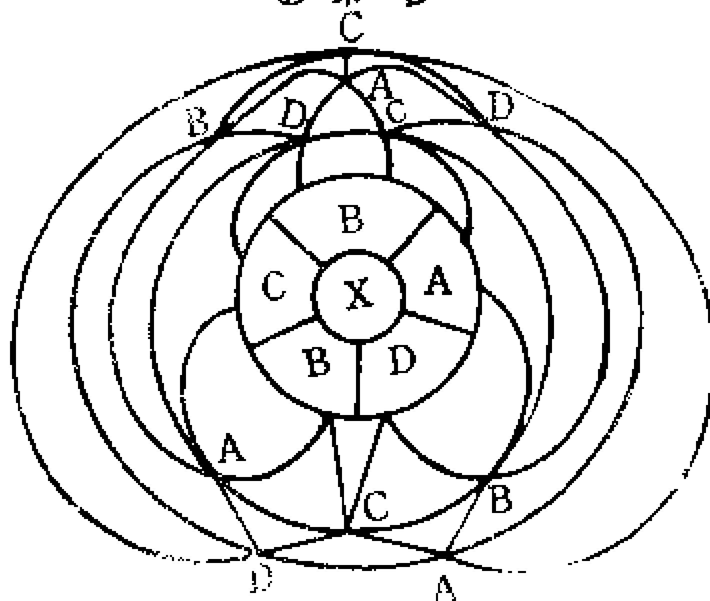
第一种、第二种、第三种二色线路图形，经上述60步的演绎证明，均可转变为第四种，即二阶四圈可控换色演绎的四色不可解线路集合基准图N。因此第一、二、三种二色线路图形，可称为二阶图N的可转换的异色图；第四类图、即二阶图N，是第一、二、三种二色线路图的还原图。至此，线点填A、B、C、D四色的都已出现。

回过头来，我们再把二阶○ADX、○ACX、○CDX三圈可控换色演绎的第一步至第十二步，分图列举于下。至第十二步，图形填色的拓扑关系已恢复到原来的状态。这时的填色变化，乃是X区的5个邻区的填色按逆时针方向转移了一个区，其外二色通道上的各结点的填色也按逆时针方向作了相应的转移。每12步，X区的5个邻区的填色按逆时针方向转移一个区（其外二

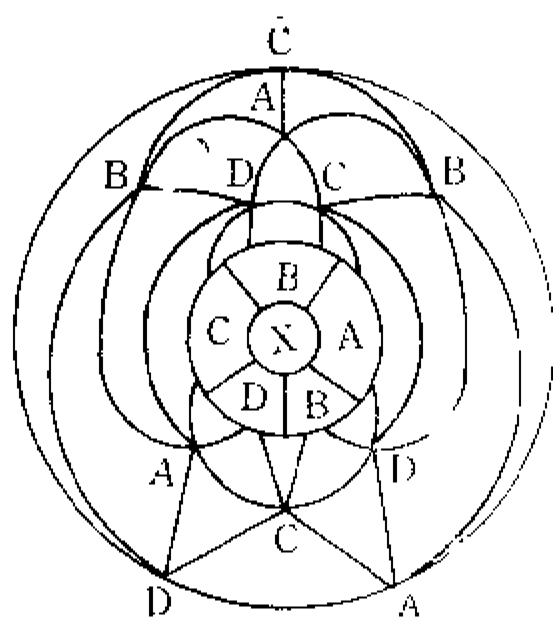
色通道上各结点的填色也按逆时针方向作相应的转移），因此，需12×5=60步，X区的5个邻区的填色及其外二色通道上各结点的填色，才能完全恢复到原来的状态。从填色的拓扑关系上说，每12步为一段，60步共为5段，每一段中相应各步的填色都是互相对应的，也就是说60步中共有12种填色。第一段的12步可控换色演绎，在填色的拓扑关系上实际已经包括了整个60步的填色，以后各段的12步填色，不过再照此轮换一遍。下面的图56是第一段1—12步的填色（请注意：此处是从○ADX外换色开始的，前面的三图可控换色是从○ACX外开始的，两者都可以）：



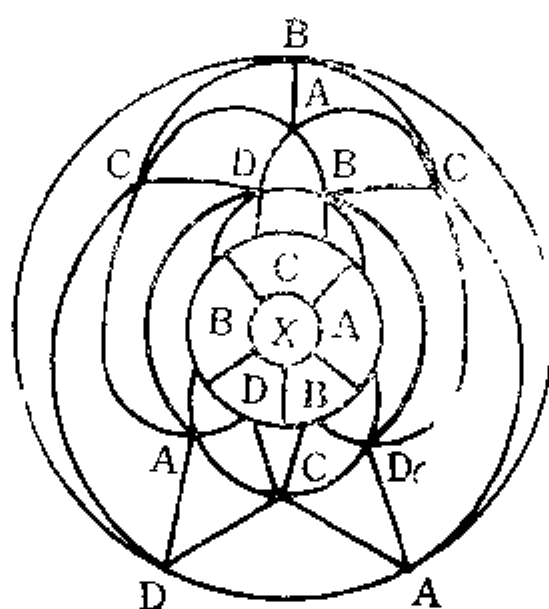
① 第一步



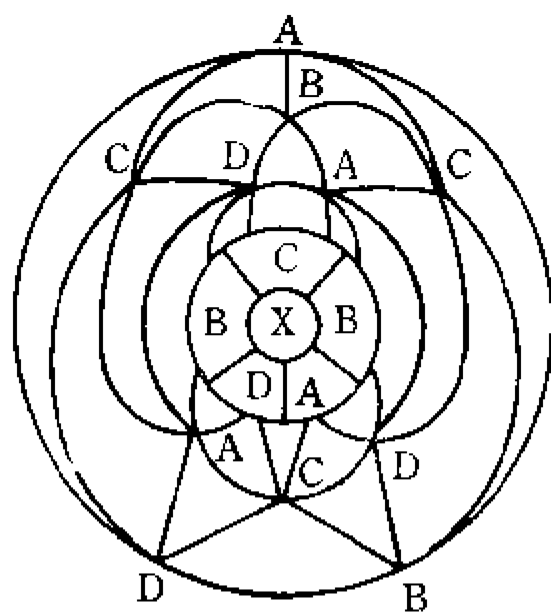
② 第二步



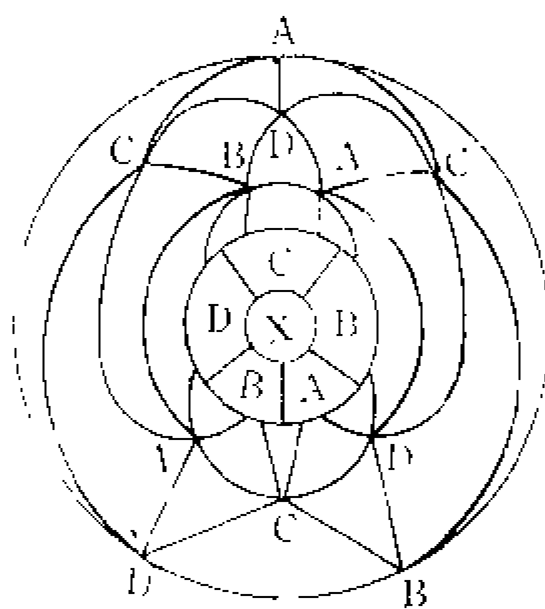
③ 第三步



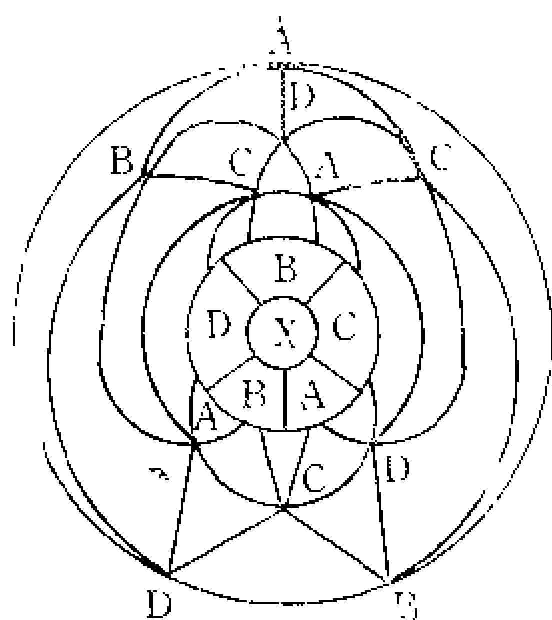
④ 第四步



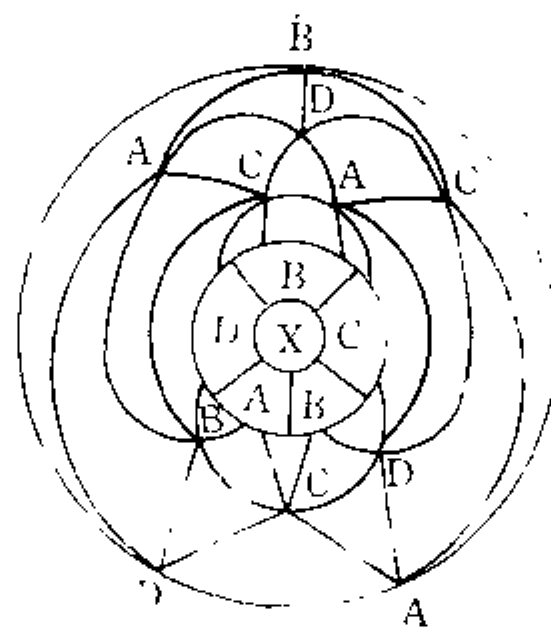
⑤ 第五步



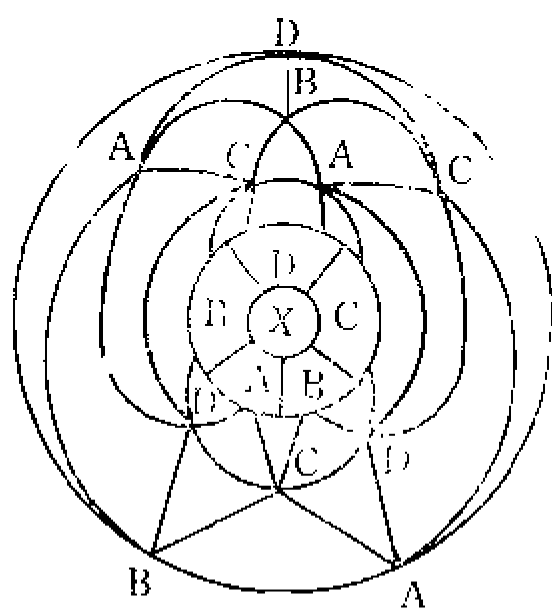
⑥ 第六步



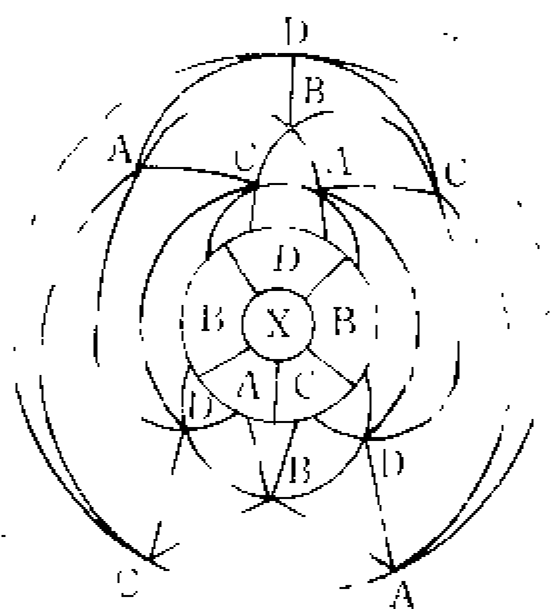
⑦ 第七步



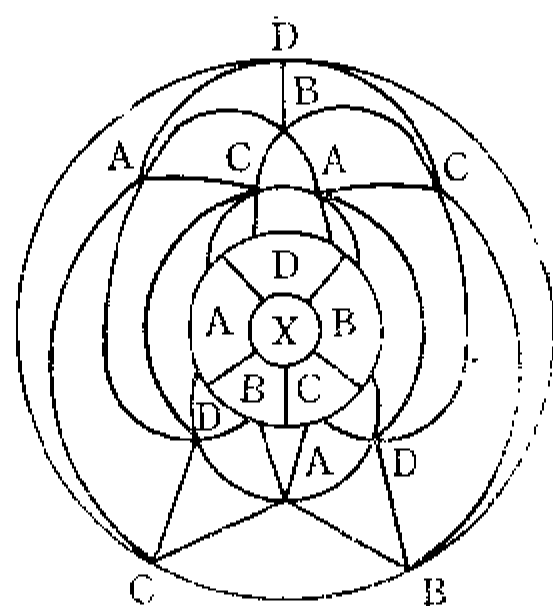
⑧ 第八步



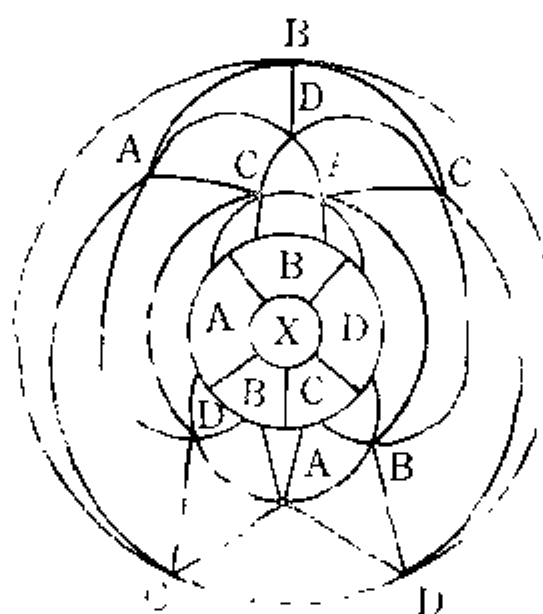
⑨ 第九步



⑩ 第十步



⑪ 第十一步



⑫ 第十二步

图 56

在上述12步图中，又可分为四类：第一类，1、5、9步图为异色同构（指二色通道为同构，但组成二色通道的色素不同）。第二类，2、6、10步图为异色同构。第三类，3、7、11步图为异色同构。第四类，4、8、12步图为异色同构。这四类图又正好同二阶四圈可控换色演绎中的A、B、C、D四类图一一对应，为异色同构图。第一类图与A类图为异色同构，第二类图与B类图为异色同构，第三类图与C类图为异色同构，第四类图与D类图为异色同构。因此，无论是四圈可控换色的20步演绎也好，三圈可控换色的60步演绎也好，从二阶四色不可解线路集合来说，模式N总共有四种异色同构图。

在模式N中，对上述二阶以双B夹A、双B夹C、双B夹D色型为特征的三圈可控换色调整的四色不可解线路集合，在可控换色调整过程中如采用一次四圈可控调整（称为跨系列转换），可分别改为双A夹B、双A夹C、双A夹D和双C夹A、双C夹B、双C夹D以及双D夹A、双D夹B、双D夹C色型，并进入这些图形的系列循序进行三圈可控换色演绎。这样，从填色上看，共有

4种三圈四色演绎图形。每种三圈四色演绎图有12个异色同构图，4种共有48个异色同构图（四圈可控换色演绎中的异色同构图已包括在这48个图内）。这48个图为二阶N模式中四色不可解线路集合中的全部异色同构图。又因X有5个邻区，故模式N中共有48×5＝240异色图。我们对所有的同二阶四色不可解线路集合基准图N的基本结点与基本线路相同（完全是一个模式，即模式N）、变化相通而填色不同的各种图，统称为二阶四色不可解线路集合基准图N的异色图或转换图。所有二阶图N的异色图或转换图，经过必要跨系列转换和循序演绎（有些可直接进行全面的二色互换），均可转变为双B夹A的二阶四色不可解线路集合基准图N。因此，双B夹A的二阶图N，可以代表所有的异色图或转换图。

3.一个极为重要的发现——连锁圈

找到二阶四色不可解线路集合基准图N后，在这个锁阵中，似乎证明四色定理成立的希望已经渺茫，甚至无望。但是，“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”。真正的希望已经摆在面前。

仔细审视二阶四圈和三圈可控换色演绎的每一步填色（或换色）及二色通道关系（包括尚未形成二阶四色不可解线路集合前的未明显化的二色通道，这些通道在第二轮的重复演绎中可以看出来），就会令人兴奋地发现，在所有四色不可解的交叉“并蒂圈”内外，一定有一个贯通交叉“并蒂圈”并与X区的3个或2个邻区相连的二色圈，并伴随着交叉“并蒂圈”的转移而变化着。我们称这个二色圈为交叉“并蒂圈”的连锁圈（简称连锁圈）。如果不能形成连锁圈（包括有隐性二色通道的连锁圈），一定二阶四色可解。连锁圈，是二阶四色不可解线路集合的中枢锁钥，在后面的三阶四色可解的演绎中，主要依靠它发挥“开锁”的作用。最终四色可解还是四色不可解，其关键就在这里。在双B夹A的二阶四圈可控换色演绎中，连锁圈是○AB。至于在二阶三圈

可控换色演绎中，全部6个二色圈分别轮流成为连锁圈，并伴随着交叉“并蒂圈”的循序转移而变化。例如，在双B夹A型的始发图中，从○ADX外开始可控换色演绎，则：第一步○AC为连锁圈；第二步○BC为连锁圈；第三步为○CD为连锁圈；第四步○BD为连锁圈；第五步○AD为连锁圈；第六步○AB为连锁圈；第七步○AC为连锁圈；第八步○BC为连锁圈；第九步○CD为连锁圈；第十步○BD为连锁圈；第十一步○AD为连锁圈；第十二步○AB为连锁圈。……

在二阶四色演绎的全过程中，找到了二阶四色不可解的线路集合（也即是全方位的连锁的四色不可解交叉“并蒂圈”线路集合），又发现并紧紧抓住了伴随着四色不可解交叉“并蒂圈”循序转移的连锁圈，因此，对无论上述任何一个二阶四色不可解的线路图，在连锁圈内（或外）进行可控二色互换（称为“开锁”），均可使四色不可解的交叉“并蒂圈”变成非交叉的四色可解的“并蒂圈”，或两个四色可解圈（“并蒂圈”消失）。

由此，连锁圈也可以分为两种：一种是“并蒂圈”四色可解的连锁圈，其特征是这种连锁圈经过X的3个邻区，在圈内（或外）“开锁”（二色互换）后，使四色不可解的交叉“并蒂圈”变为四色可解的非交叉“并蒂圈”。另一种是单圈四色可解的连锁圈，其特征是这种连锁圈经过X的2个邻区，在圈内（或外）“开锁”（二色互换）后可使交叉“并蒂圈”消失，形成两个四色可解圈。在二阶四色不可解线路集合基准图N中，每一步可控换色演绎，这两种连锁圈都在互相转换。无论四圈可控换色演绎或者三圈可控换色演绎，均有这两种连锁圈。在后面的四色演绎中，我们均选定四圈可控换色演绎，不再提三圈可控换色演绎。

（四）关于二色通道交叉粘连和二阶图N的复式图R_1

对照一阶图M和二阶图N，在四色演绎过程中，还会出现二色通道的交叉粘连现象，使一阶和二阶四色不可解的线路呈现出各种复杂的情况。我们称这种出现复杂情况的图形，分别为一阶图M的复式图P和二阶图N的复式图R_1。我们先研究二阶图N的复式图R_1，然后再专题研究一阶图M的复式图P及其在二阶中的演绎——二阶图R_2和二阶图R_2R_1。

二色通道粘连，一种为触及式点粘连和重叠式线粘连，称为非交叉粘连。另一种为交叉式粘连，称为交叉粘连。触及式点粘连仅是某条二色通道同另一条二色通道在相同的色点上粘连而不穿过，重叠式线粘连是两条二色通道局部线段的粘连，只在交叉粘连后的部位才会出现这种线粘连的情况，在四色演绎过程中并不引起任何变化，因而可视为不粘连（见图57）。

①触及式点粘连



②重叠式线粘连

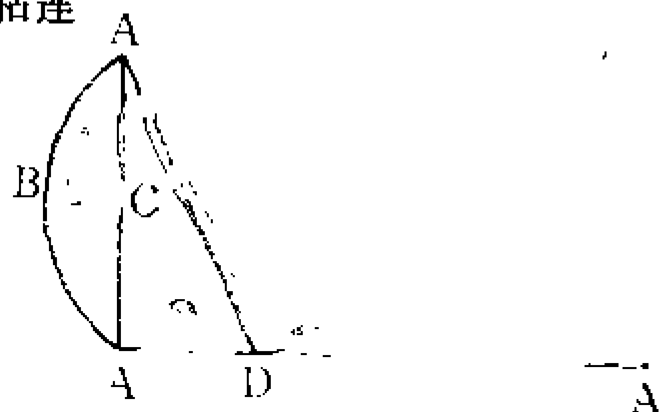


图 57

非交叉粘连线路图视同于不交叉粘连线路图。一阶图M和二阶图N，也包括它们的非交叉粘连线路图。

交叉粘连是某条二色通道穿过另一条二色通道上的相同色点（甚至连续穿过多条二色通道），同被穿过的二色通道呈1—n次交叉扭结形状，越位的部分，如图58中段A—B与A—C互换位置的部分，就是交叉粘连（两头的线段不是）。

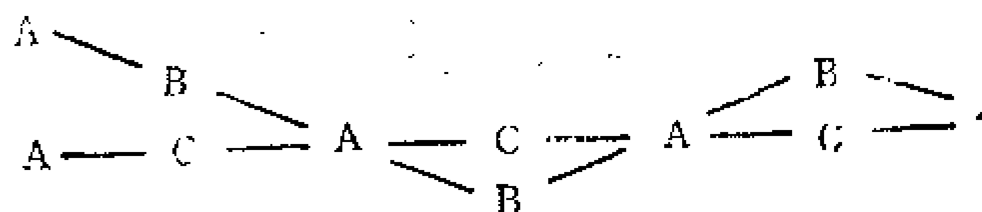


图 58

在四色演绎过程中，各种二色通道交叉粘连，是引起和形成一阶、二阶四色不可解的复式图的原因。两线的多次交叉粘连与一次交叉粘连在演绎中结果相同。

1.复式图与二阶基准图N的关系以及二阶复式图定理

在二阶四色演绎过程中，某些二色线路如果受到相对立的另二色隐性色线的制约，不能直接同目标结点或X的邻区相连，而需要经过同其他二色线路的交叉粘连后才相连，甚至径直同下一个目标结点连接，则上述的二阶基准图N则变为四色不可解线路集合的复式图。我们称其为二阶图N的复式图R_1。在这种复式图中，二阶基准图N中的各结点（这些结点在复式图中称为基本结点）的填色和相互间所形成的二色通道关系不能变。复式图无论如何复杂，其二色通道关系必定同二阶基准图N一致或者等价，否则即为二阶四色可解图形。因为复式图的20步演绎，每一步的要求和变化均与二阶图N相同，所不同的只不过是从线路图形的的总体上看出现了交叉粘连的情况。这种复式图，第一，是在二

阶四圈可控换色的20步实际演绎过程中形成的，而不能是假设的；第二，在16个基本结点（包括X的5个邻区在内）之间的二色通道关系上必定同二阶基准图N一致或者等价；第三，正因为如此，所以这种复式图有些可以归约为（即变交叉粘连为非交叉粘连）二阶四色不可解线路集合基准图N，有些虽不能完全归约为二阶图N，但在实际演绎中必与二阶图N等价。

在这里的所谓等价，是指在形成二阶图N的复式图以后，在进行新一轮或多轮演绎时，其实际演绎过程和所经过的线路与二阶图N相同，但又不能归约为二阶图N，因为某些两条相邻的二色线段共处于1—n个3线桥或2线桥中（“桥”指由两条二色线段交叉粘连所引起和形成的色线束），看起来在桥中的具体线段关系与二阶图N不一致，实际上在二阶20步演绎过程中有关二色线路均可顺利从桥体通过。因此说它与二阶图N是等价的。在二阶四色演绎过程结束后（包括变交叉粘连为非交叉粘连），在整个线路图中是否仍存在着相邻两条二色线段交叉粘连所形成的3线桥或2线桥，这是二阶图N的复式图R;同二阶图N的唯一区别。关于4线桥（包括4条桥线以上的桥）可变交叉粘连为非交叉粘连的问题以及3线桥的问题等，后面专题进行研讨，在这里先着重谈谈I线内的2线桥必同时有一条隐线的问题。也就是说，它必然是一个包含一条隐线的3线桥，否则为四色可解。

在二阶演绎过程中，在特定情况下，由于某些复式线路（即色线束）的显性线路不充分，出现两条相对立的隐性色线（例如A……B同C……D）两可选择（通过）的情况下，为进一步论证四色问题，如有加以明确的必要，当按二阶基准图N中的色线加以选择。这种按二阶基准图N所择定的隐性色线，称为N隐性色线。

先看图59，这是在实际演绎过程中出现的二阶四色不可解线路集合中的一种特殊图，也是二阶基准图N的复式图。四圈可控换色的20步演绎已经完毕，不仅与二阶基准图N不一样，再进

行新一轮的演绎结果也仍相同。

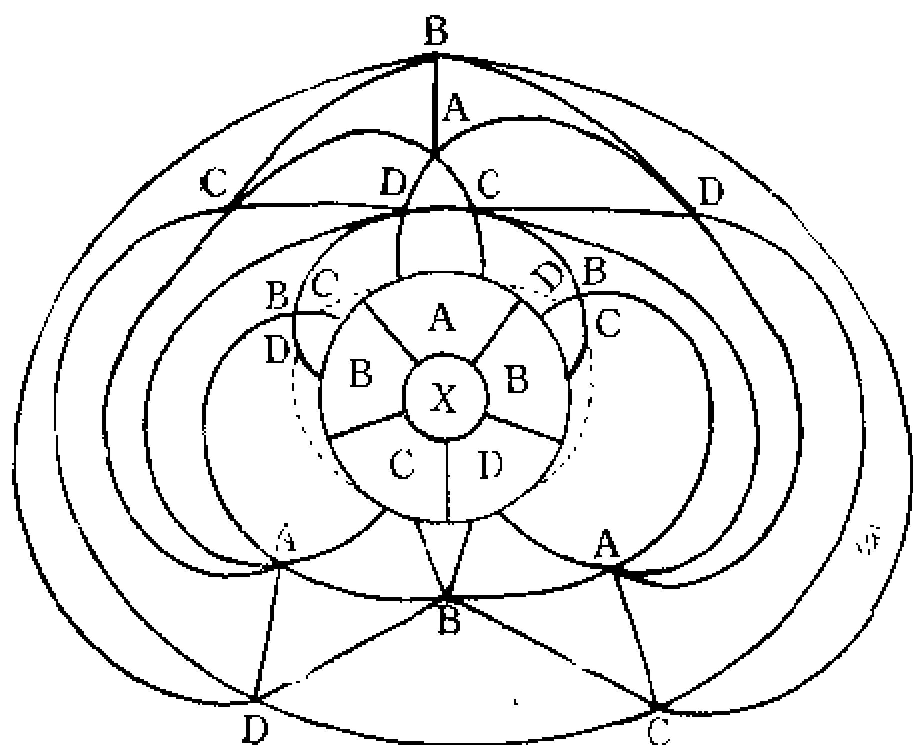


图 59

图中X的两个邻区B（V_2）与B（V_5）其外侧显性和隐性线路不充分、不明朗。在B……A与C……D两条相对立的待确定隐性线路的地带，应确定哪一条？同二阶基准图N相对照，B……A 应为N隐性线路。X的邻区C（V_4）同D（v_1），D（V_3）同C（v_2）之间应无C……D相连通。如有C……D隐线连通，则在二阶四圈可控换色演绎过程中为四色可解图形，见图—图62（将C……D隐线变为C—D显线）。

（图60注：按约定，左侧A……C与右侧A……D必存在，否则必存在B（V_5）……D（v_1）和B（V_2）……C（v_2），按此重新演绎即成二阶基准图N。）

（a）图60中，在○ADX内进行B与C二色互换，结果除形成原二阶演绎过程中的○DBX外，还在右侧沿原D—C（V_3—v_2）形成另一个○DBX。

（b）依序演绎，在这另一个○DBX外进行A与C二色互换（见图61）。

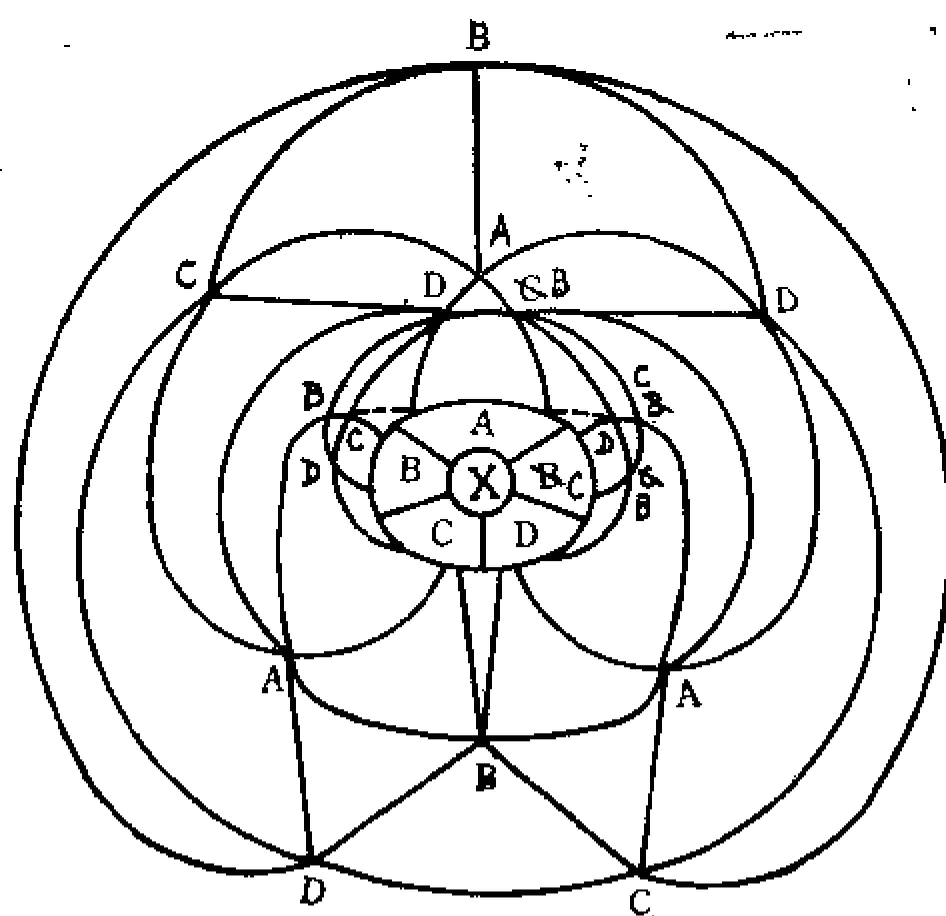


图 60

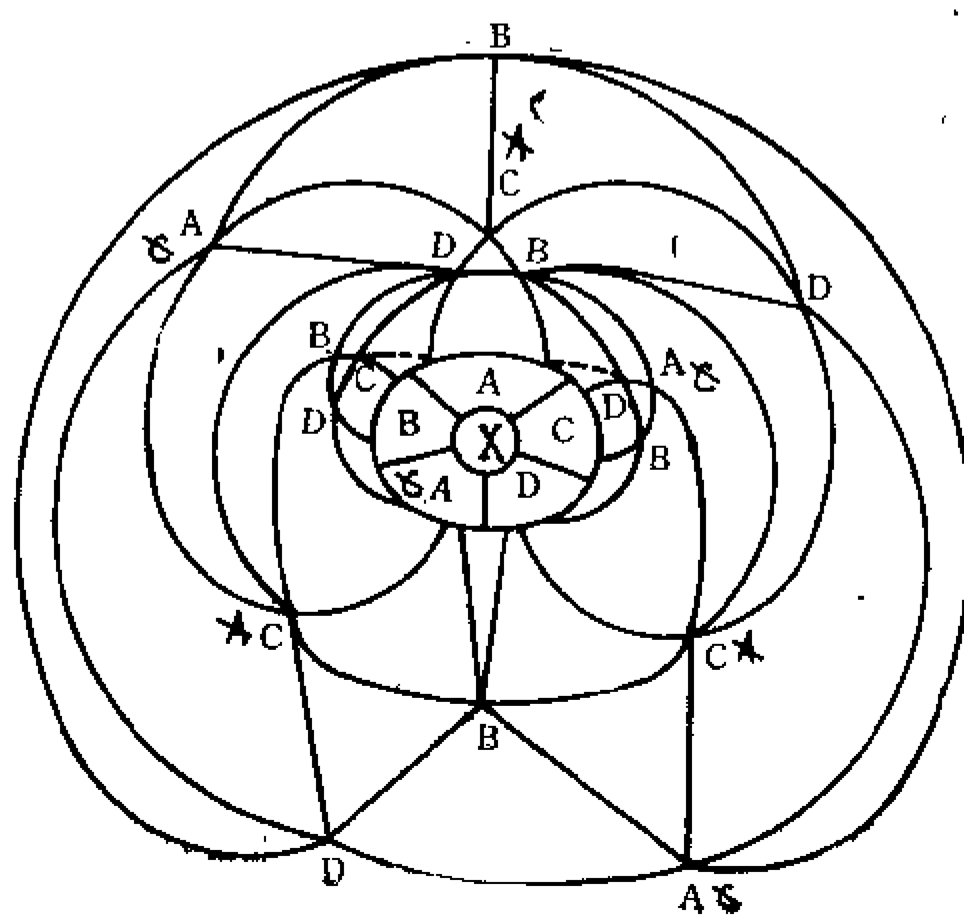


图 61

（c）循序进行下一步演绎。将图右侧的结点C（v_3）与B连接起来（否则经右侧A……D隐线必形成○ADX四色可解圈）成○BCX，形成○BDX与○BCX交叉"并蒂圈"。在○BCX外进行A与D二色互换，形成了○BDX四色可解圈。见图62：

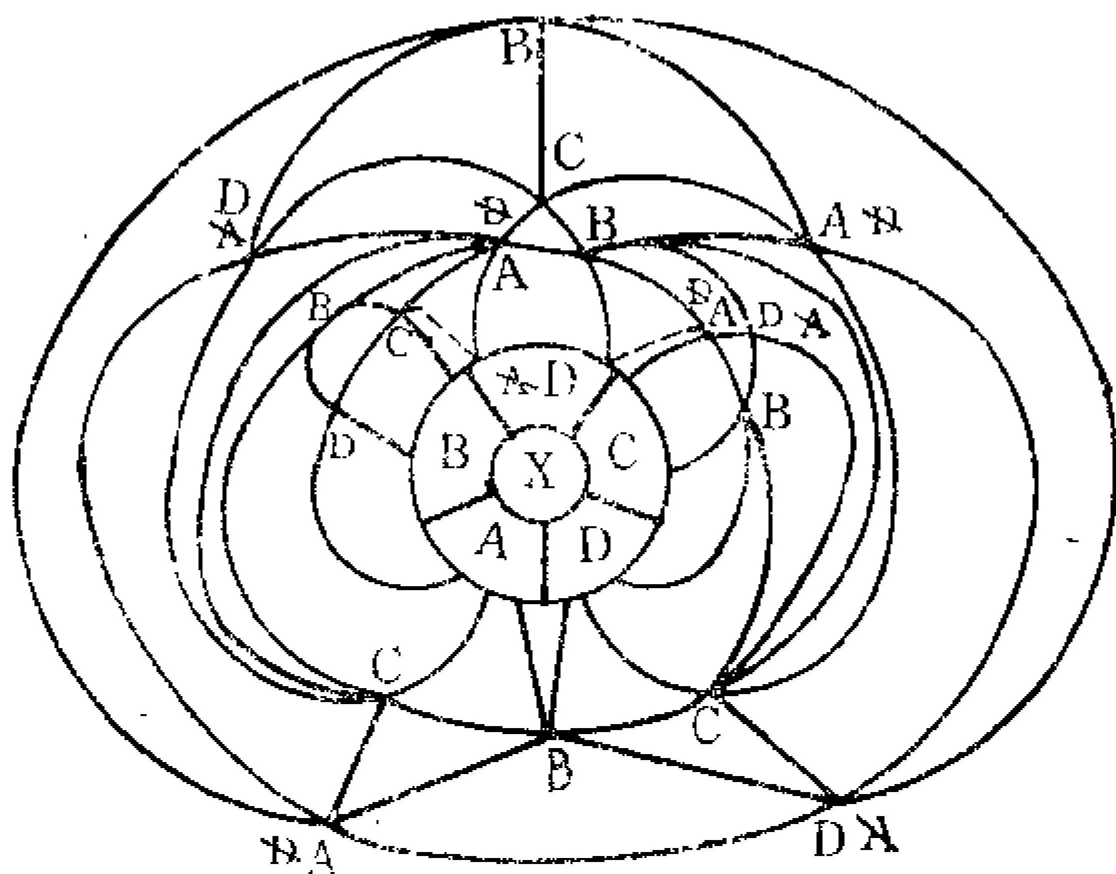


图 62

由此我们就可以在○BDX中进行C与A二色互换，将C色填入X区。因为它不符合二阶四色不可解线路集合的要求，故必须排除这种情况。现在不仅在理论和逻辑上而且可以进一步用实际的演绎回答当初提出的问题了：在X的两个邻区B（V_2）与B（V_6）外侧待确定隐性线路的地带，应同二阶基准图N一致，定为B……A隐性线路。

至于上述C……D隐线只在图形一侧连通，如在右侧，结果与上同。如在左侧，则从左侧X邻区B（V_6）开始，按逆时针方向用同样方法进行演绎，即：①在○ACX中进行B与D二色互换，除形成原二阶演绎过程中的○CBX外，还在左侧沿原C—D

（V_4—v_1）形成另一个○CBX。②在这另一个○CBX外进行D与A二色互换。③将图左侧的结点D（v_5）与B连接起来（否则必形成○ACX四色可解圈）成○BDX和形成○BCX与○BDX交叉“并蒂圈”。在○BDX外进行A与C二色互换，不可避免地形成○CBX四色可解圈，至此可在○CBX中进行D与A二色互换，将D色填入X区。

在二阶四色不可解线路集合中，只在I线范围内共同连接X的某一邻区的两条二色通道交叉粘连才会出现上述情况（参见后面的《相邻两条二色线段的交叉粘连和I线范围内的成桥定理》）。我们称其为“并蒂线”。“并蒂线”的n次交叉粘连，包括各种各样的交叉粘连，其演绎均与一次交叉粘连相同. 其间必有N性隐线，否则为二阶四色可解。我们称不能变交叉粘连为非交叉粘连的二阶四色不可解线路集合图，包括在I线范围内X的邻区所连接的“并蒂线”交叉粘连并有一条N隐性色线的线路图，还有包含3线桥的线路图，为准非交叉粘连二阶图N，即二阶图N的复式图R_1。前面已经说过，它与二阶图N等价。

如果不是从形成复式图的原因上考察，而是从基本结点和基本线路的表现形态与机制上来考察，对二阶基准图N与其复式图的关系可以这样定义：为适应二阶四色演绎过程中出现的各种复杂情况，二阶图N的某个或某些基本结点被迫一分为n（$n\geqslant 2$，其间由若干桥线组成的桥相连，以保持二阶四色演绎线路的畅通。这些桥和桥线的状况，记载和反映了二阶四色演绎中有关二色通道经过该基本结点的状况，由交叉粘连线路的对应比和支撑隐线的情况决定（后面将作具体分析）。基本结点“聚”为基准图，基本结点“散”为复式图。复式图在本质和功能上等同于基准图，二者等价。这些，从后面我们所进行的二阶复式图演绎和举出的各种复式图中，可以得到具体验证。

在二阶四色演绎中，由交叉粘连所引起和形成的各种线路图，凡与二阶图N不一致或者不等价的，按定理7和前述二阶20步连

锁可控换色演绎的实证过程可知，皆为二阶四色可解图形，在二阶四色演绎中予以排除。凡是二阶图N的的复式图，必与二阶图N一致或等价。我们称此为二阶复式图定理。它包括在定理7之中，也可以视为定理7的引理。

2．复式图的演绎规则

①遵守二阶四色不可解线路集合基准图N的演绎顺序和定型化规定，而且形成交叉粘连一定要有支撑隐线（迫使交叉粘连的二色隐线）的制导。

②总体演绎线路须比照二阶基准图N进行。当过桥需拓新桥线时（“桥”为色线束的形象化用语，非交叉粘连貌似桥，其实不是桥）需注意：（a）弄清支撑隐线，并选择最小的交叉桥线。（b）在演绎过程中，如桥的两侧仅一侧有支撑隐线，能摆脱交叉粘连的即摆脱交叉粘连，即过桥时从无支撑隐线一侧通过，从而变交叉粘连为非交叉粘连；如不能，则这一侧也必有支撑隐线。（c）两线第一次交叉粘连后，而两侧均有支撑隐线，下次过桥时，凡能从交叉圈中间穿过的则从交叉圈中间通过（因原定交叉粘连时选择最小的交叉线路，故最多只能有一条桥线从交叉圈中通过），以后再从两侧支撑隐线中允许通过的一侧循序拓最小桥线通过。如两侧支撑隐线均允许通过，则任择一侧。（d）在形成4线桥（色线束为4）后，过桥时遇有同色之两线可供选择，一般应选择靠近支撑隐线所允许新桥线通过的那一侧（称为前方，可用→表示）的桥线通过。对4线桥以上的，也照此办理，即在间色线中不断选择最靠近支撑隐线所允许通过的那一侧的桥线。

③在一轮演绎中（即从第一步至第二十步），桥线尚不完全者，即尚缺所需线路或可以达到而尚未达到所需要的桥线数者，除可变交叉粘连为非交叉粘连者外，一般应当继续进行下一轮的演绎。即，对于复式图来说，第一个20步演绎未必为完整的演绎过程。必要时还可进行多轮演绎。

④当一轮演绎过程结束，如桥线完全（一般取4线或3色3线），无必要继续下一轮的演绎时，可在桥体范围内进行桥线的可控换色。在每一轮的演绎过程当中，一般不在桥体范围内进行桥线的可控换色。

⑤在这个演绎过程中，如果演绎受阻中断，或直接为二阶四色可解图形（另二色线路——包括制约隐线与同色支撑隐线，形成四色可解圈），或转入另外与此相衔接的四色演绎图（即另二色线路——包括制约隐线与同色支撑隐线，尚暂时形不成四色可解圈），直至形成二阶四色可解线路图为止。（参看后面《桥断受阻必为二阶四色可解》）

3．复式图桥体形成概说和桥体模式

桥体形成的初始原因是，在演绎过程中，其二色线路受与之相对立的另二色隐线的制约（这种隐性色线称为支撑隐线）与另线形成交叉粘连，或穿过另线与下一个目标结点交会，从而在可控换色后使另线路断，因此当其后走另线经过时不能走原线而只能另拓新桥线，除非在走另线前能使原线恢复通行（这种情况只存在于I线范围内由“并蒂线”——X的同一邻区并联的两条色线呈交叉粘连所形成的桥）。无论复式图怎样复杂，在整个二阶演绎的每一步中，必须像在二阶基准图N中的演绎那样，保持二色线路的畅行无阻，过桥时旧桥线不通就要在支撑隐线的制导下拓新桥线。如果受限制不能拓新桥线，或被迫使所走线路形成与二阶基准图N相背异的圈，按定理7则必同时存在与此二色线路相对立的四色可解圈，或在其后的演绎中形成四色可解圈，使图成为二阶四色可解图形。

如果一条二色线路连续穿过2条或2条以上的二色线路返回（见图63），则：

（a）走3线（穿过2条或2条以上二色线路的线路）则可控换色后1线与2线断（用①②表示）。

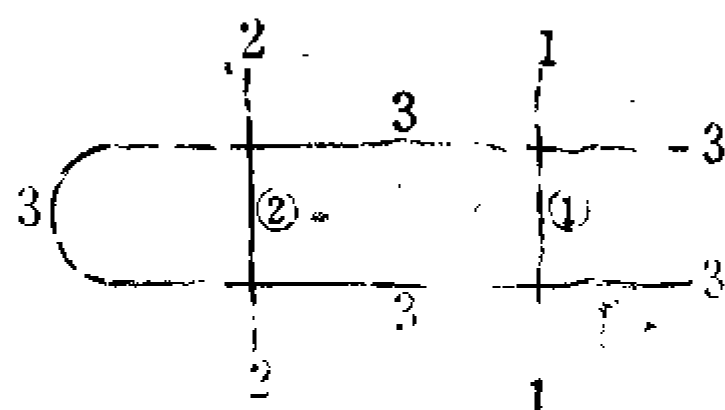


图 63

（b）以后再走原1线、2线和3线时，经演绎不仅3线断，同时在原1线和2线桥断处必将开拓出新的桥线（否则为四色可解），分别形成2个3条桥线以上的桥体，并使原3线与相邻的1线共用一个桥体。

（c）因此，一条二色线路连续穿过2条或2条以上的二色线路返回，其演绎的结果等同于穿过相邻的一条二色线路形成交叉粘连，只不过在它穿过的其他二色线路上也分别形成了桥。

下图为二阶四色演绎第十一步C—B从C（v_1）始连续穿过—B与D—C二线，返回后交会于B（v_8）所形成的交叉粘连，演绎至第二十步，桥线的状况为（见图64）：

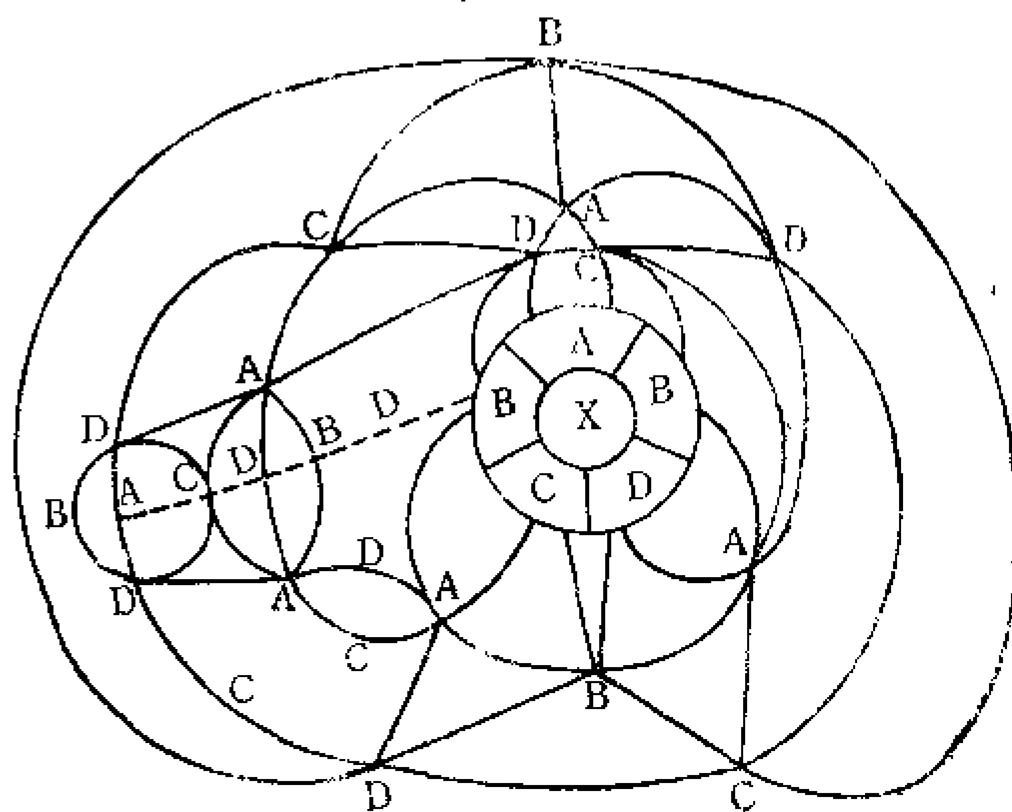


图 64

图64中略去多余线路，即呈现为非交叉粘连二阶四色不可解线路集合基准图N。

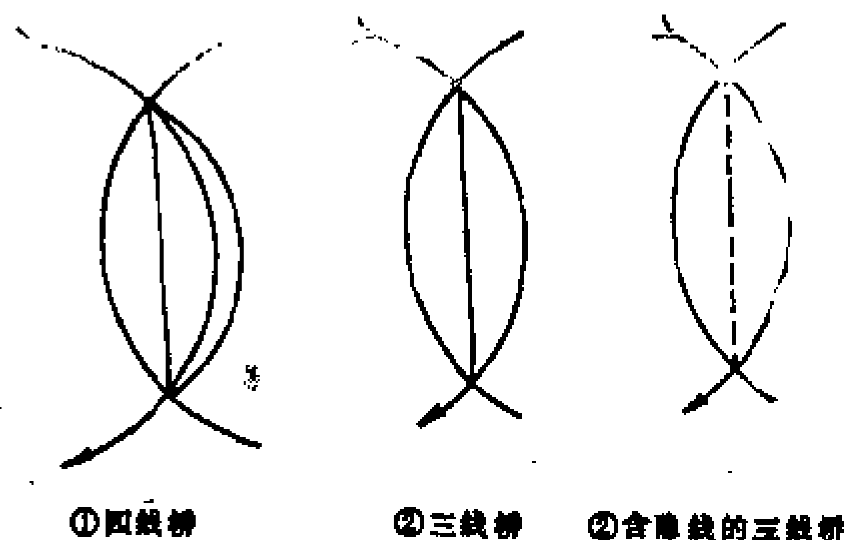
下面谈谈桥体（或称桥区）的一般模式：

桥体模式可分为单式和复式两类。

单式桥体指两线交叉粘连在演绎中所形成的桥体。其中又可分为2线桥（在二阶四色不可解线路集合中，如前所述只是I线内的“并蒂线”，2线桥中实际上还存在着一条隐性桥线，其实也是3线桥）、3线桥和多线桥（4线和4线以上）三种。

复式桥体指一条二色线路接连穿过2条或2条以上的二色线路呈交叉粘连所形成的多桥联体，演绎结果为多个单式桥体的组合。

简单交叉粘连形成的桥（见图65）：



①四线桥　　②三线桥　　②含隐线的三线桥

图 65

一条二色线接连穿过2条或多条二色线中部返回后形成的桥（见图66）：

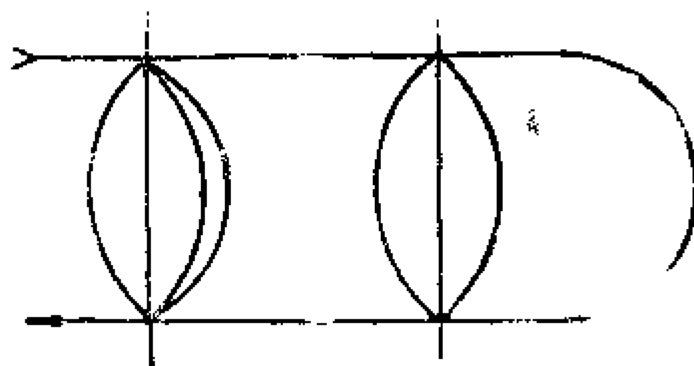


图 66

一条二色线接连穿过2条或多条二色线与目标结点交会形成的桥（见图67）：

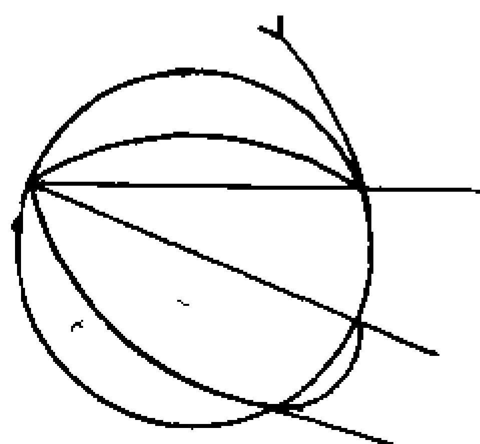


图 67

（注：图67为一个最简单的桥联体，桥线不充分）

此外，一条二色线路接连穿过多条二色线后，不能与直接的目标结点交会，而与下一个目标结点交会（实际上也是一种交叉粘连），所形成的甚至可能是两个桥联体（或一个桥联体与一个单式桥体）相连的复式桥体。

在实际的二阶四色演绎中，由于可能受到各种制约隐线等的限制，桥的走向和形成会出现各种复杂的情况，甚至还可能出现基本结点的转移，这里不作具体的论述，留待后面研究解决。必须肯定和记住的是，成桥的机制就是开拓二阶四色演绎的通道，不管具体的线路图形怎样变化，万变不离其宗，桥体的形成及其形态都必须保持二阶四色演绎的线路畅通，在最后（包括经过桥体自身的可控换色调整），必然得到与二阶图N一致或等价的线路图形（即变交叉粘连为非交叉粘连或与二阶图N等价），如不能，必为二阶四色可解图形，因而在二阶演绎中把它排除。

4．单式桥体的微观分析

桥体是由两条二色通道的交叉粘连引起并在其后的二阶四色演绎中形成的。对桥体进行微观分析，离不开交叉粘连的两条线路的对应比。规定被交叉粘连的二色线路为m线，交叉粘连的二色线路为l线。对应比是交叉粘连相关的两条二色通道m与l循序交替走的次数（在二阶四色演绎过程中为成二色圈以便进行可控换色时所经过该线段的次数）的排列比。例如循序m线走1次，l线走2次，m线走1次，l线走2次，其对应比即为1、2、1、2，简记作

1212。

在二阶四色不可解线路集合基准图N的复式图中，交叉粘连的m线与l线两端均连接X区，分别为二色封闭圈。下面按对应比为1对1（1 1 1 1 1……）进行演绎。

规定新的二色线路l（设A—C）同原有另一条二色线路m（设B—C）交叉粘连，取最小交叉线路（见图68）。

则：(a)迫使新二色线路l同另一条二色线路m交叉，必定有同新线路l色素相反的二色隐线支撑（见图69）。

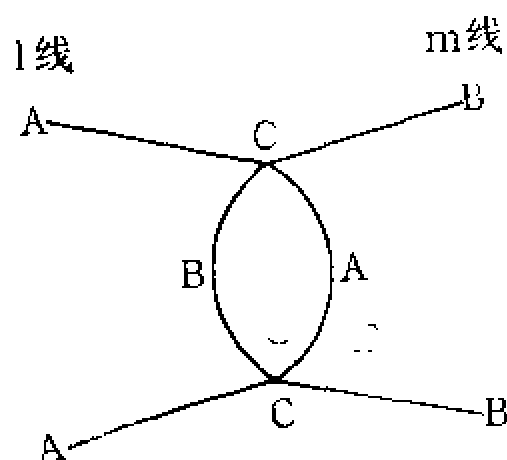


图 68

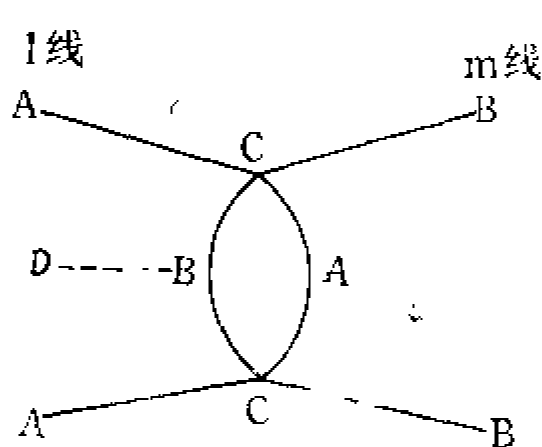


图 69

(b)被交叉粘连的二色线路m，如果所界为最小区域，在圈内一侧亦必有色素相反的二色隐线支撑(倘在圈外则无)。不过，这一侧若无支撑隐线，在其后的演绎中可使m线过桥时从这一侧通过，即可变交叉粘连为非交叉粘连。因此，下面我们取m线这一侧也有支撑隐线（见图70）。

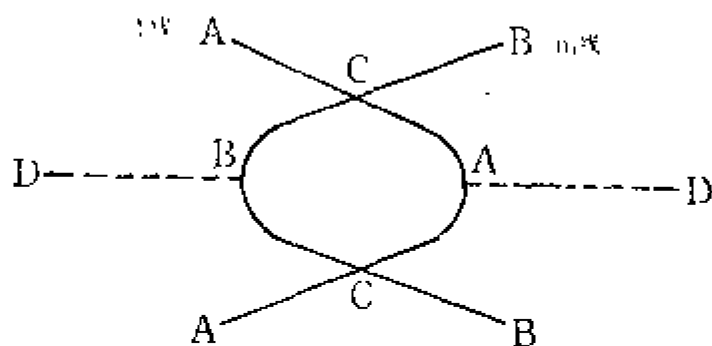


图 70

(c)在两线交叉粘连的界内，因规定交叉走最小线路，从实际演绎的效用来说，交叉的两点之间至多只可能有一条二色桥线在交叉区内相连，或者不能相连（见图71）。

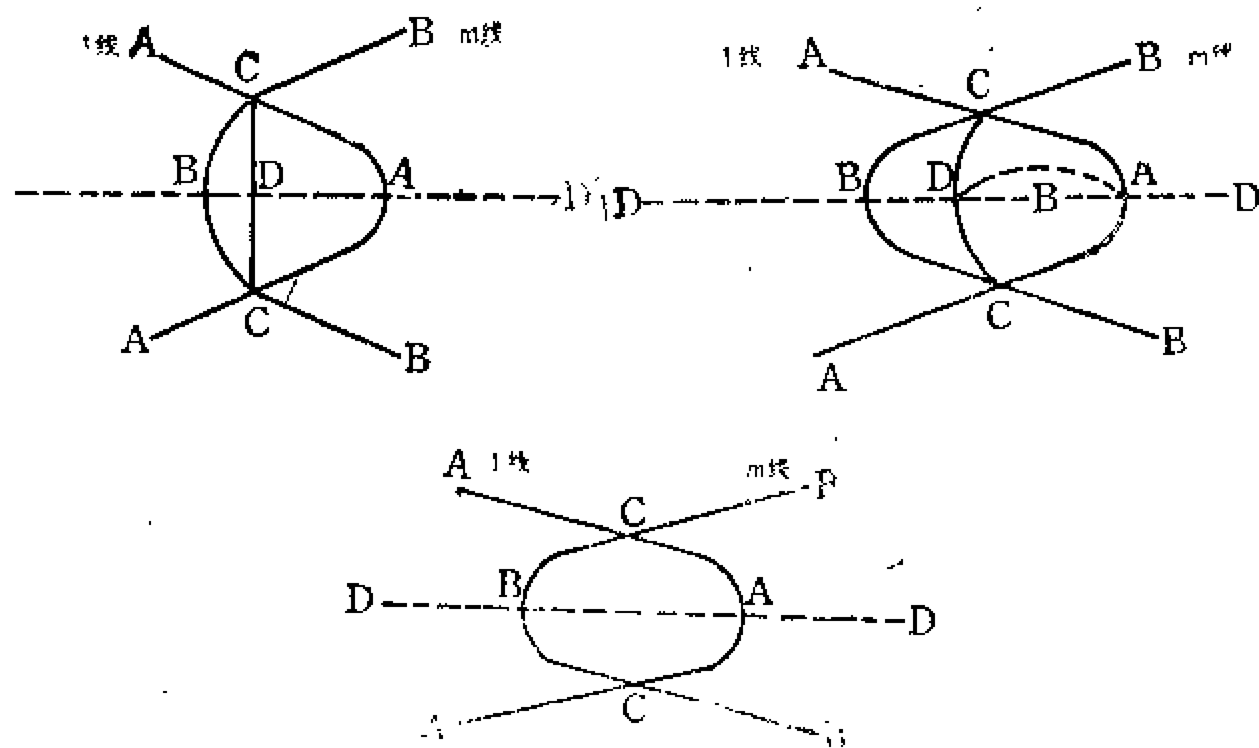


图 71

下面，谈谈两线交叉粘连后的演绎顺序和桥体状况：

对(a)项，l线穿过m线交叉粘连后，经○ACX内可控换色，则m线桥断，D……B支撑隐线变为B……D支撑隐线。（在○ACX外可控换色，桥外分别连接两交点C的C—B线变为C—D线，对桥体来说其效果和作用相同，即m线的桥断了。因此，在对单式桥体进行微观分析时，二者是同价的。以下同此，均按二色圈内可控换色处理。）下次m线过桥时，如能走无隐线支持一侧，则可变交叉粘连为非交叉粘连，略去多余桥线后使桥消失（见图72）。

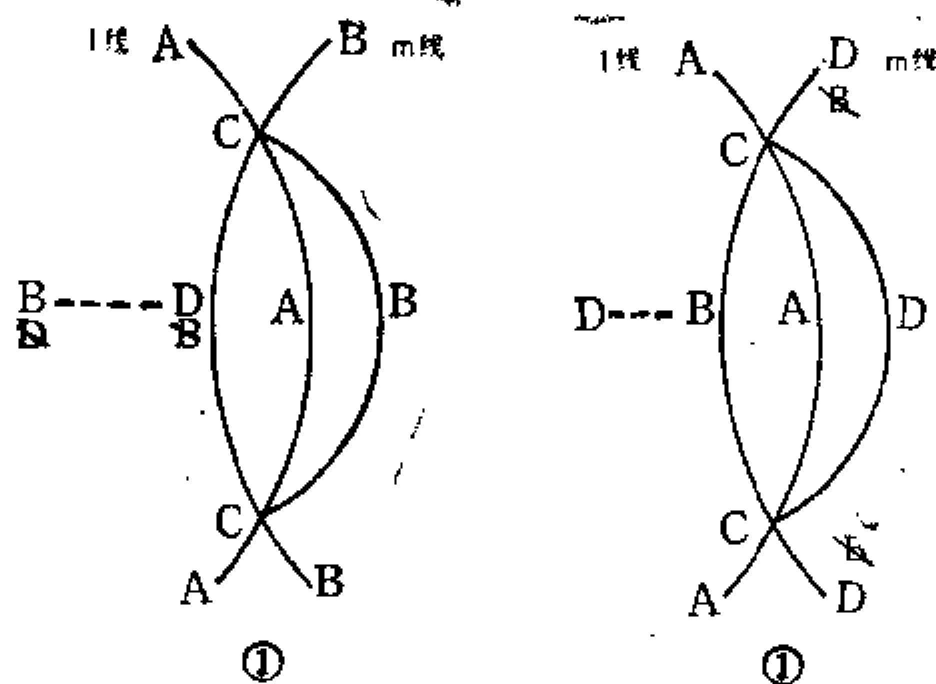


图 72

上图①如m线不能走无隐线支撑一侧变为非交叉粘连，则必有A……D隐线支撑（对上图②则有A……B隐线支撑），当按(b)项和(c)项处理。

对(b)项和(c)项：

①当走l线与m线交叉粘连，经可控换色后，m线断（见图73）。

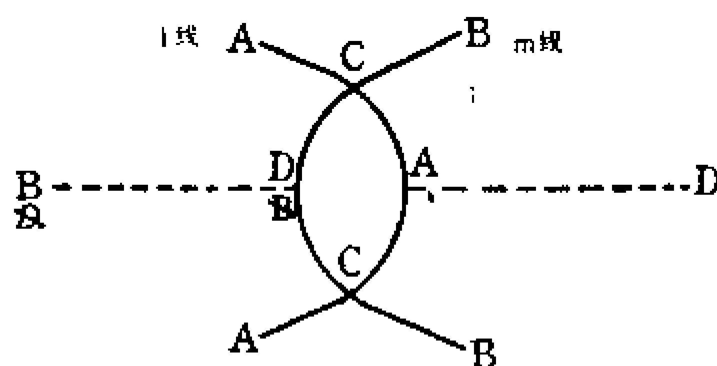


图 73

②下次走m线过桥时，如在桥体○CDCA中不能通过（即在桥线C—D与C—A之间，C—B线不能相连），则桥体之D与A之间必呈隐线相连（D……A）。这样，m线B—C可通过隐线B……D上最靠近断桥一侧的可通过的B点形成新的C—B桥线，

并进行A与D的可控换色（见图74）。

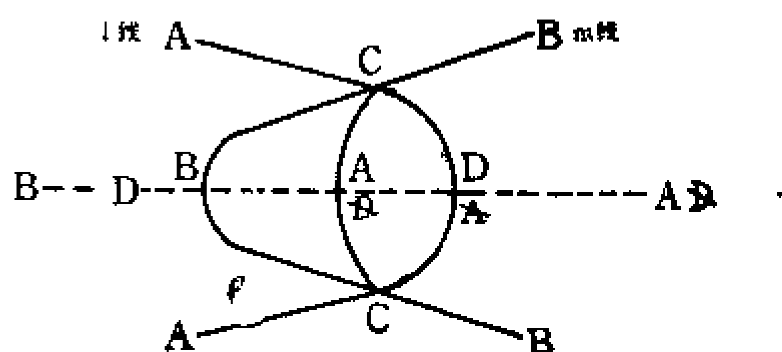


图 74

③下次走l线，情况与①项相同。再走m线，情况与②项相同。隐线A……D向前推进，隐线B……D向后退缩（见图75）。

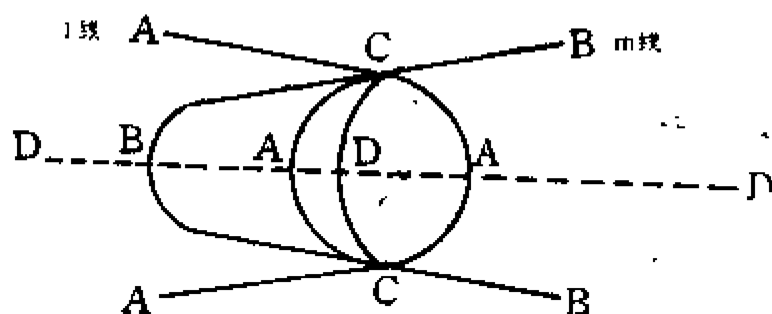


图 75

④再下次走l线，有两个A—C桥线可供选择。如选择后A—C桥线（前与后按隐线推进的方向确定），经可控换色后，则l线与m线变为非交叉粘连（见图76）：

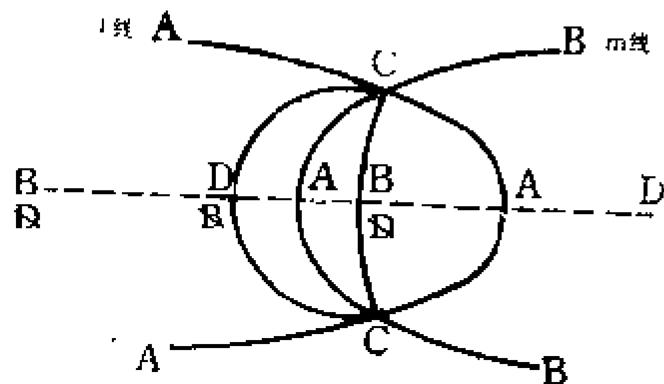


图 76

如选择前A—C桥线，可控换色后，m线桥断，下次走m线过桥时可通过隐线B……D中最靠断桥一侧可通过的B点形成C—B新的桥线。A……D隐线继续向前延伸，B……D隐线继续后退（见图77）。

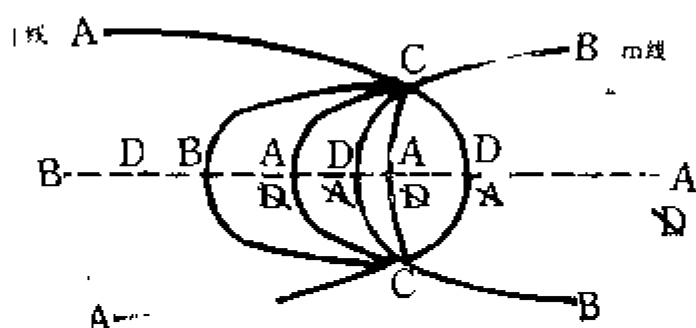


图 77

在以后的过桥演绎中，倘令每次A—C桥线的选择均为前A—C线，则如上述演绎，通过D……B隐线不断形成新的B—C桥线，A……D隐线步步向前延伸，D……B隐线步步后退。在这个过程中，如果B—C桥线通过的是D……B隐线上的最后的一个极点，仍继续按此演绎，则不可能再有新的B—C桥线，而是在走l线进行可控换色后，整个D……B隐线变成了D……A隐线，与原有的D……A隐线贯通成一线。○CBX被打破了，A……D在○BCX中逸出（见图78）。

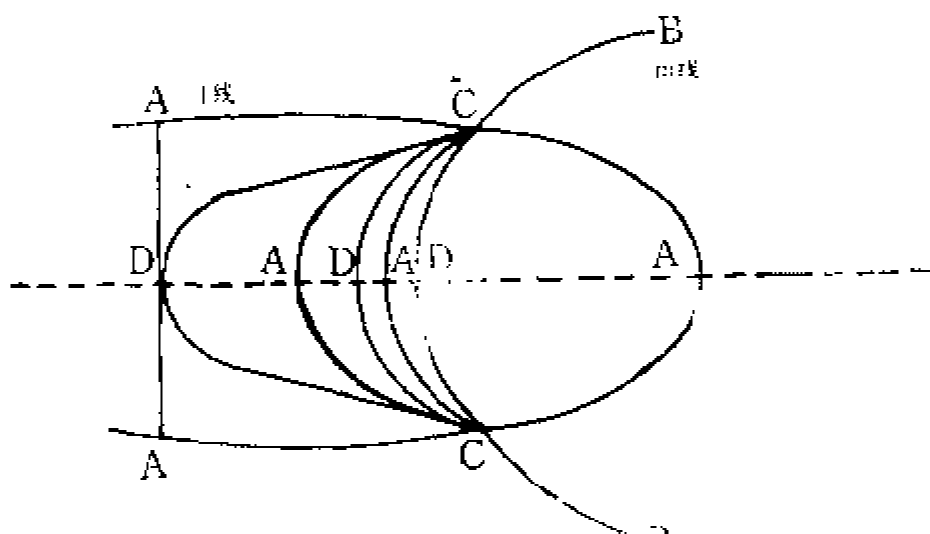


图 78

⑤当上述②项m线过桥时，如在桥体○CDCA中能通过，即C—B能在原来的2条桥线中间相连，则令首先过此桥线。可控换色后为（见图79）。

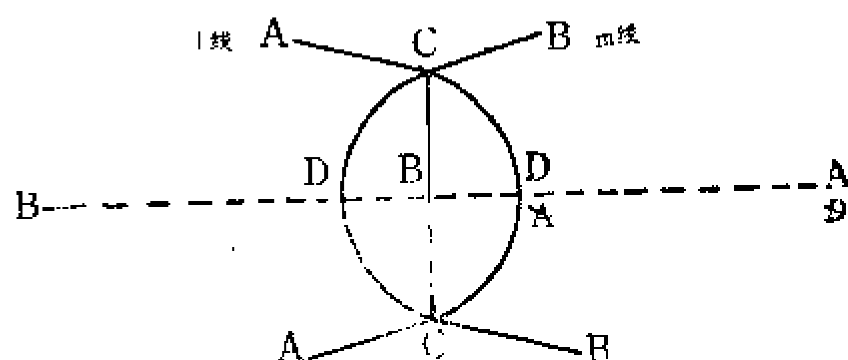


图 79

下次走l线，并可控换色（见图80）。

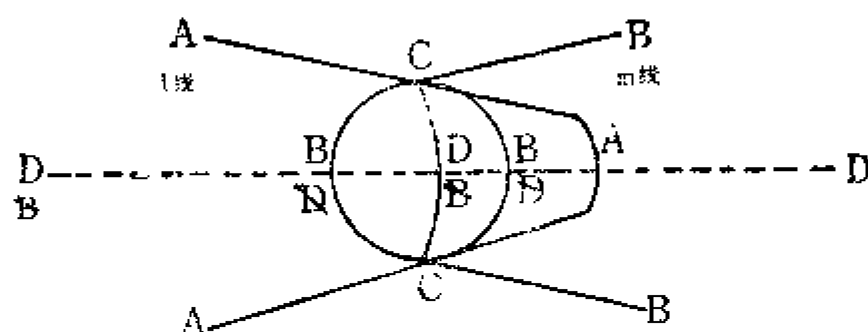


图 80

下次走m线，也有两个B—C桥线可供选择。情况和演绎方法同④项，只是逆转了D……B隐线与A……D隐线消长的方向。如选择后B—C桥线，在可控换色后则A—C与B—C由交叉粘连变为非交叉粘连，可使桥消失（见图81）。

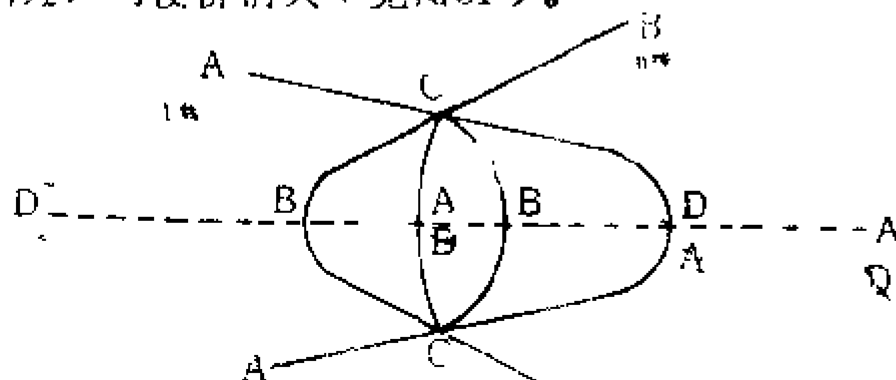


图 81

如果m线选择走前B—C桥线，而且在以后的演绎中坚持走前B—C桥线，则一步一步通过A……D隐线不断形成新的A—C桥线，B……D隐线步步向前延伸，A……D隐线步步后退。如果A—C桥线通过的是A……D隐线上最后的一个极点，仍继续按此演绎，则不可能再有新的A—C桥线，而是在走m线进行可控换色后，整个A……D隐线变成了B……D隐线，与原有的B……D隐线贯通成一线。○ACX被打破了，D……B在○ACX中逸出。

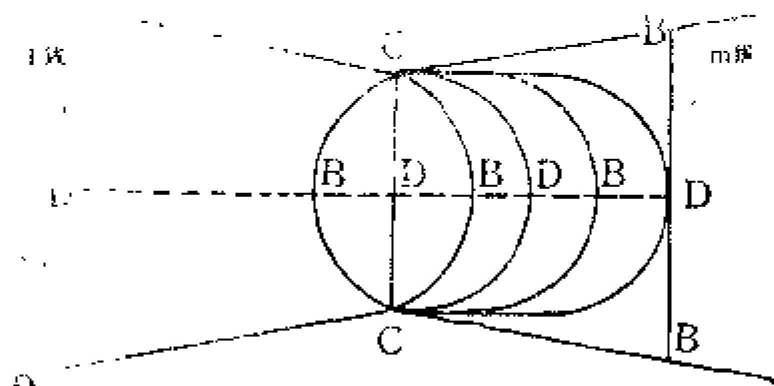
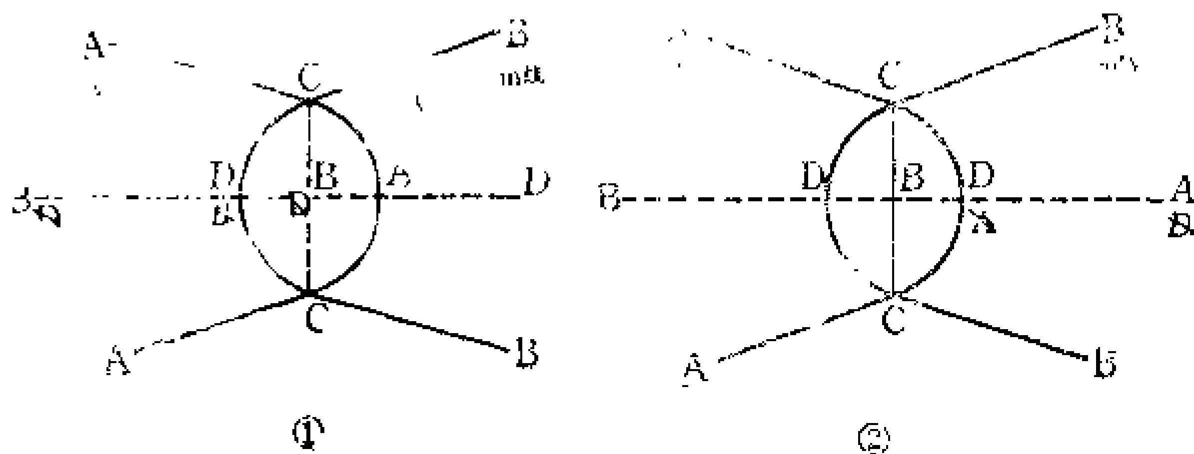


图 82

此外，在上述过桥演绎过程中，还可能出现中途受阻的情况，即在D……B隐线上有横向的D……A隐线阻截，或在A……D隐线上有纵向的D……B隐线阻截，在演绎中与上述遇到隐线上的极点相同，使原有的一个二色圈打破，隐线从圈中逸出。

假m线与l线的对应比发生变化则会出现一些复杂的情况。根据二阶四色演绎的实际情况，下面归纳为三种：

①从m线开始计算，或从l线开始交叉粘连时计算，凡两线



经过的次数交替为1对2或2对1之循环往复者，均为3线桥。见下例（图83）：

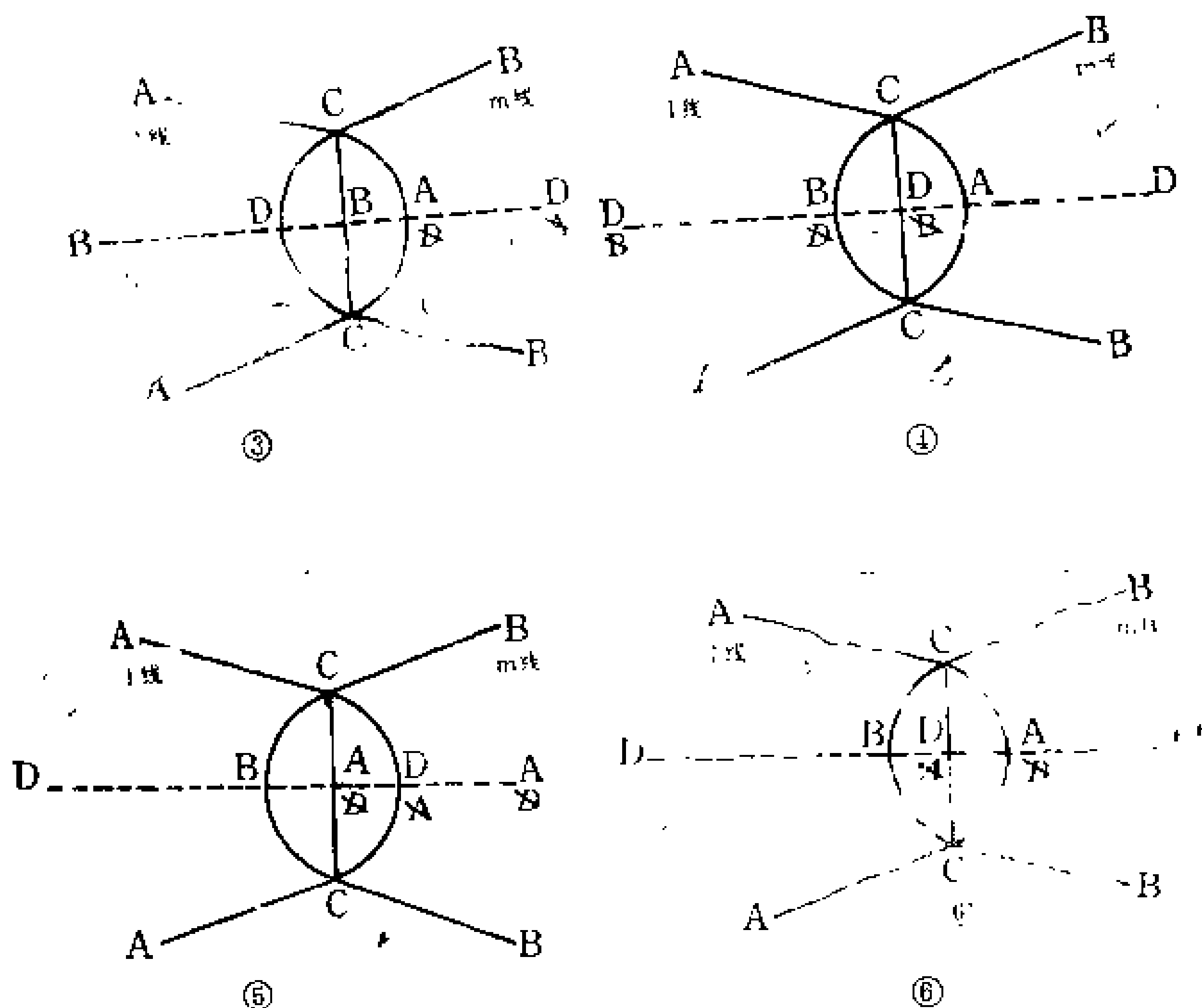


图 83

再走l线，即回到分图①，进入新一轮的循环。

②从m线开始计算，或者从l线开始交叉粘连时计算，凡两线经过的次数分别为 1·2·1·1·2·1或1·1·2·1·1·2 及其循环往复者，根据两线交叉粘连后桥线是否从桥体中间穿过为转移，有的为4线桥，有的为3线桥。例如：

m线和l线的对应比为121121，其成桥的结果如图 84 所示。

从l线开始交叉粘连时计算，l线与m线经过次数分别为1·2·1·1·2·1（此处不是对应比，不能简记为121121，因未将交叉粘连前的起始线m计入），其成桥的结果如图85所示。

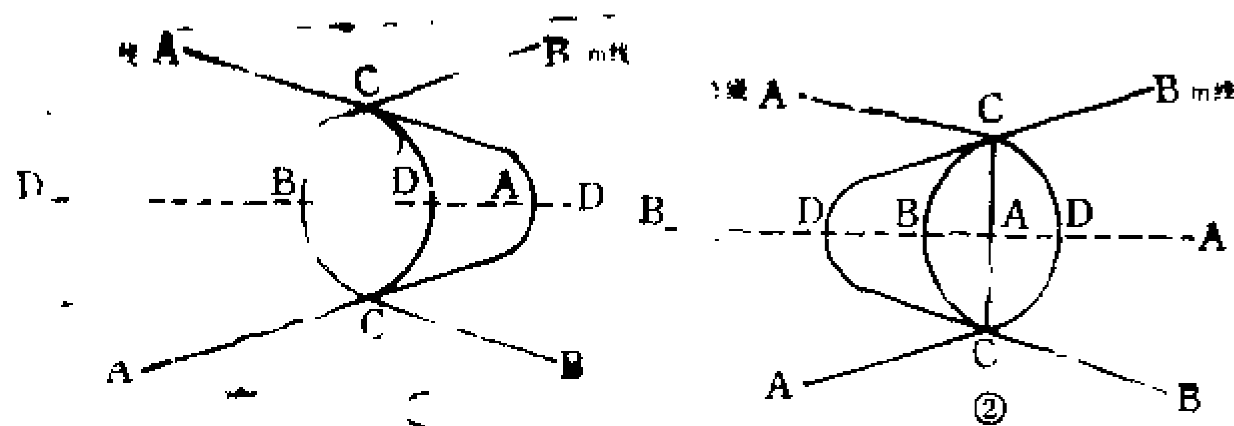


图 84

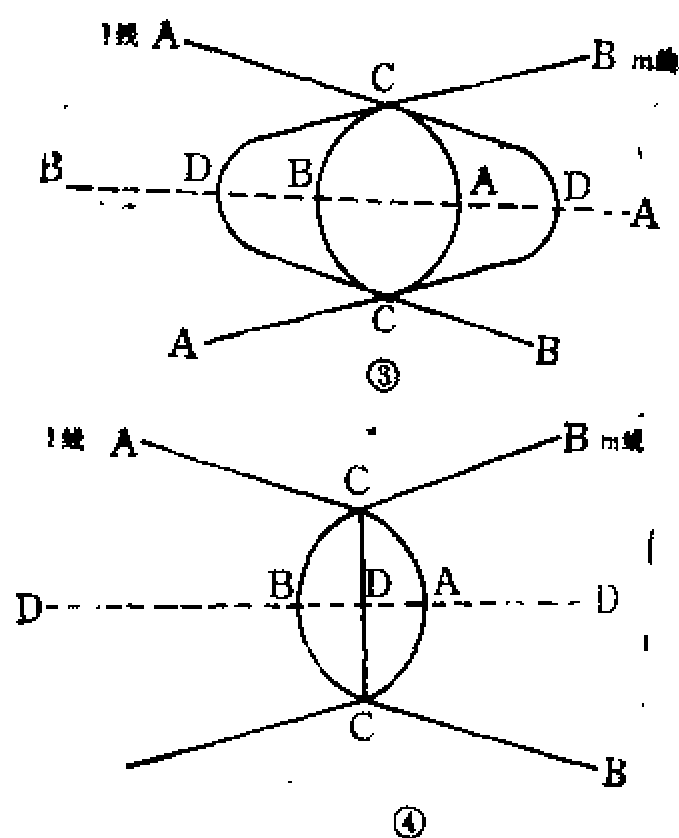


图 85

③在交叉粘连中，如始终呈2线桥，其情况必为：从交叉粘连开始，l线和m线分别各走2次，并进行可控换色。这样，同一条线路第一次过桥并进行可控换色后，使另一条线路桥断，但是不等走另一条线路过桥就接连第二次过桥，进行可控换色后使另一条线路桥通。"先修断桥后通车"，如此循环往复。在模式N

中，这种情况只有在Ⅰ线内，而且l线与m线均以X的同一个邻区为始发点或终点（称为二色交叉“并蒂线”）才有可能出现。因为在Ⅰ线内的交叉“并蒂线”，只有连接“并蒂区”的线路通过，是“专线”而不是“公共线”，情况单一，从交叉粘连开始，以“并蒂区”为二色线路的始发区到为二色线路的终点区（记为2次），l线和m线都是轮番各走一条“并蒂线”。从整个二阶四色不可解线路集合来看，如前面《1．复式图与二阶基准图N的关系》所述，此2线桥必有一隐性桥线，因此可视同为3线桥。

至于在二阶四色演绎过程中相邻m线与l线交叉粘连成桥，其不同线段间的不同对应比，在后面《14．相邻两条二色线段的交叉粘连和Ⅰ线范围内的成桥定理》中再一一具体列举。

两条二色通道呈n次交叉粘连，其二阶四色演绎与1次交叉粘连相同。

5．4线桥定理、引理和3线桥定理

一个桥的桥线数等于或大于4的，可统称为4线桥。每条桥线由2色组成，也可称为色线。

4线桥定理：任何一个4线桥，桥体中间的两条桥线，可分别具有与相邻的桥的边线不同的两种色线的功能。即经过桥体自身的可控换色调整，两侧的外桥线及其相邻的中线可以分别具有3种色线的功能（至于桥线交叉，详见“桥之中桥”）。

下面用穷举法证明，同模式的异色图不列。

a、见图86，在○AC中B可改为D。因此，中线A—B可以具有与相邻边线A—C不同的A—B和A—D两种色线的功能。在○AB中，C可改为D，中线A—C可以具有与相邻边线A—B不同的A—C和B—D两种色线的功能。

b、见图87，在○AB中，C可改为D。因此，中线A—C可以具有与相邻边线A—B不同的A—C与A—D两种色线的功能。继之，中线A—C改为A—D后，在○AD中B可改为C。因此，

中线A—B可以具有与相邻边线A—D不同的A—B与A—C两种色线的功能。

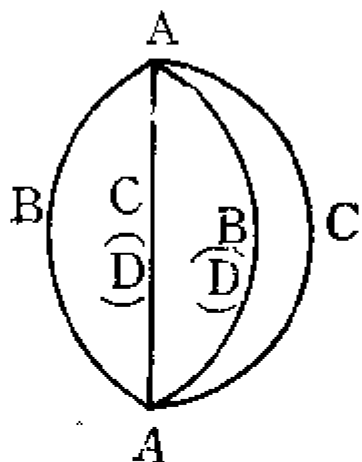


图 86

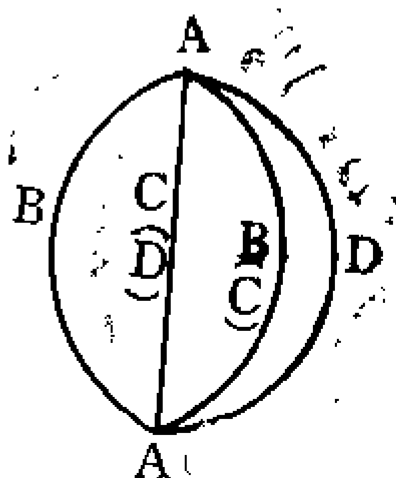


图 87

c、见图88，在○AC中，B可改为D，因此，中线A—B可以具有与相邻边线A—C不同的A—B与A—D两种色线的功能。继之，中线A—B改为A—D后，在○AD中C可改为B。因此，中线A—C可以具有与相邻边线A—D不同的A—C与A—B两种色线的功能。

d、见图89，在○AB中，C与D可以互换。因此，中线A—C可以具有与相邻边线A—B不同的A—C与A—D两种色线的功能；中线A—D可以具有与相邻边线A—B不同的A—D与A—C两种色线的功能。

4线桥定理的引理：因为总共只填有4种颜色，桥的两端点为

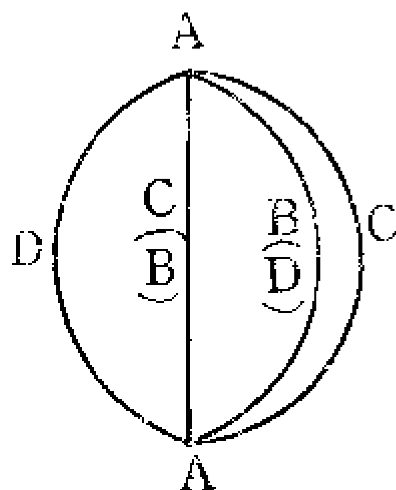


图 88

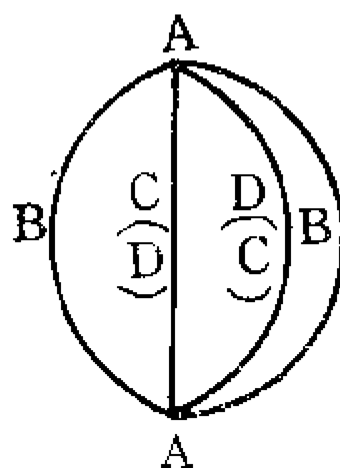


图 89

一种颜色，故桥体至多只能有3种色线。按4线桥定理，两侧的外桥线及其相邻的中线，经可控换色调整，必可分别具有3种色线的功能，因此，任何4线桥经桥体自身的可控换色后，一定可以使任何两条过桥线路由交叉粘连变为非交叉粘连。

3线桥定理：

对任何一个3色3线桥（3条桥线分别为3种色线，其中可以包括一条隐桥线），各种色线均不可能从桥体横向穿过。当某一条二色线路经过桥体中的一条线路后形成封闭圈，在圈内（或圈外）进行可控换色后，使桥或依然是3色3线桥，或具有某种3条色线的功能，即：在桥体自身可控换色中，可以具有3条色线中的任何一条色线，以保持桥路的畅通。

证明：

a、二色圈经过的桥线，使圈将另外两条桥线围在圈内，在可控换色后，桥仍保持3色3线桥（见图90）。

b、二色圈经过的桥线，使圈将另外两条桥线位于圈外，在可控换色后，桥仍保持3色3线桥（见图91）。

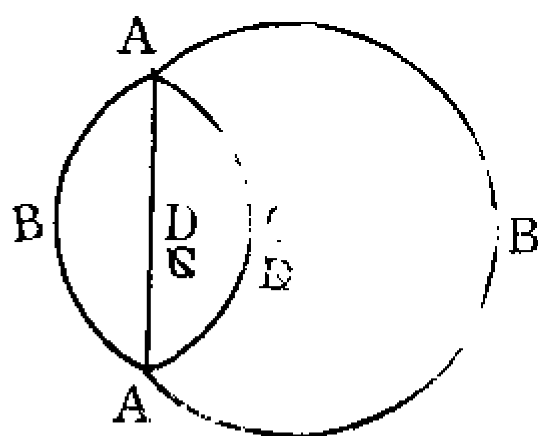


图 90

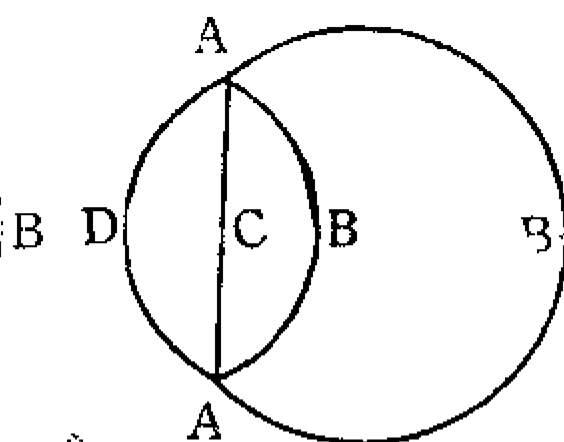


图 91

c、二色圈经过的桥线，将另外两条桥线一条围在圈内，一条位于圈外，在可控换色后使两侧桥线变为相同桥线，使3色3线桥变为2色3线桥。由于两侧同色桥线合围，使桥体形成一个小二

色圈，因而在这个小二色圈中可控换色，可使中间桥线具有A—B与A—D两种色线的功能，从而使整个桥仍具有某种3色3线桥色的功能，即保持3条色线中的任何一条都能在桥体中通行无阻。（见图92）

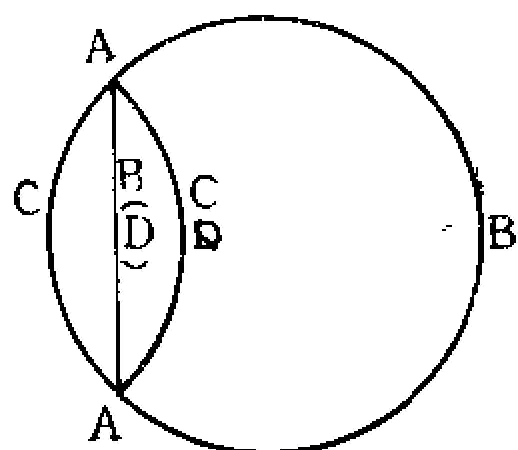


图 92

同理，对任何一个2色3线桥（2色3线桥指桥的3条桥线为2种不同颜色的二色通道），通过桥体自身可控换色，可阻止所需阻止的色线从桥体横向穿过。当某一条二色线路经过桥体中的一条线路后形封成闭圈，在圈内（或圈外）进行可控换色后，使桥或为3色3线桥，或具有某种3条色线的功能，即：在桥体自身可控换色中，可以具有3条色线中的任何一条色线，以保持桥路的畅通（见图93）。

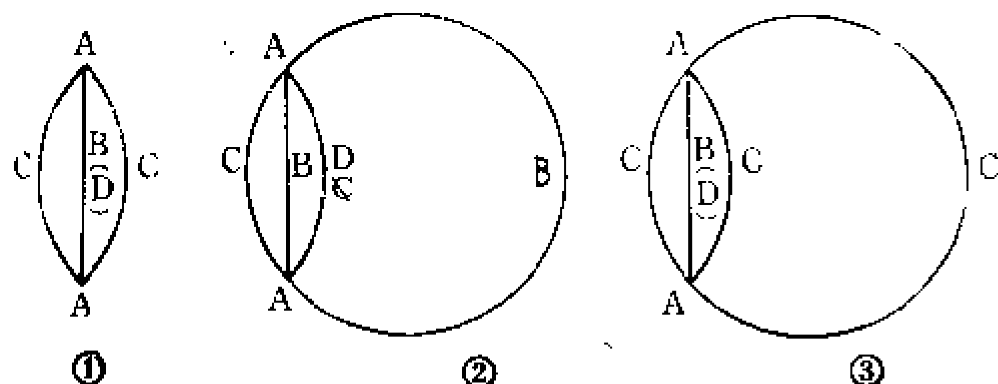


图 93

6．桥中之桥和子母桥定理

在二阶四色演绎过程中，当l线与m线交叉粘连后，由于过桥时受制约隐线的限制，还可能出现桥线交叉粘连的情况，并可

能由此引起和形成桥中之桥。我们称桥中桥为子桥，原来的大桥为母桥。当大桥可以继续开拓新的桥线满足二阶四色演绎过程中l线与m线过桥的需要时，交叉的桥线可以不形成为子桥，而把它作为一条桥线或弃线。当大桥不能开拓新的桥线满足l线与m线过桥的需要时，则交叉的桥线必须形成子桥，以保持二阶四色演绎线路的畅通，否则为二阶四色可解。对后一种情况，又可以分为两类：一类是子桥与母桥并存，子桥嵌于母桥之中，是母桥的一部分，子桥的作用在于变母桥的桥线交叉粘连为非交叉粘连，使母桥的桥线畅通。一类是子桥孕于母桥之中，进而取代了母桥，使母桥其余的线段一部分成为子桥外的非交叉粘连线段或引桥(引桥也是非交叉粘连线段，只不过表现为3色3线桥的形式)，一部分可作废线弃去。由于在二阶四色演绎中，桥的性质、作用和功能是保持20步演绎过程中四色不可解线路的畅通，子桥的性质、功能和作用只能与母桥一致而不能相悖。两条二色通道交叉粘连所形成的桥线数决定于m线与l线的对应比，因此，决不会由于在桥体中出现桥中桥而改变这种状况。由此得出：

子母桥定理：无论桥中桥作为母桥的子桥存在，或者最后取代母桥，在最后形成的桥体中，桥的性质、功能和有效桥线数均与无桥线交叉粘连的桥相同。

下面，在实际演绎中分类加以说明

(a)交叉的桥线可以不形成为子桥，而把它作为一条桥线或弃线。以m线与l线的对应比为1与1为例，经演绎可得出(见图94)：

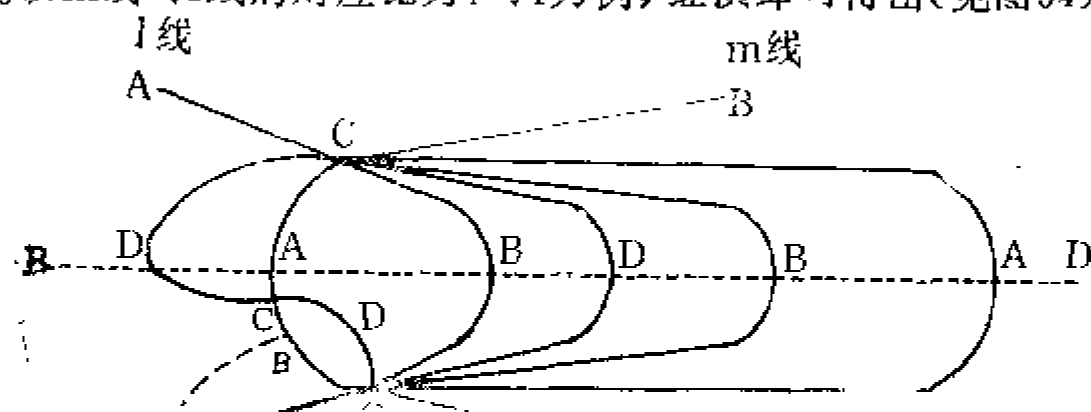


图 94

(b)子桥与母桥并存，子桥嵌于母桥之中，是母桥的一部分，其作用在于变母桥的桥线交叉粘连为非交叉粘连，也可以直接在并存的子母桥中经桥体可控换色使整个桥体变为非交叉粘连。

△以m线与l线的对应比1与1为例，第五步（从原始线B—C开始计算）B—C桥线受隐线制约与C—D桥线交叉粘连，经继续演绎可得出（见图95）：

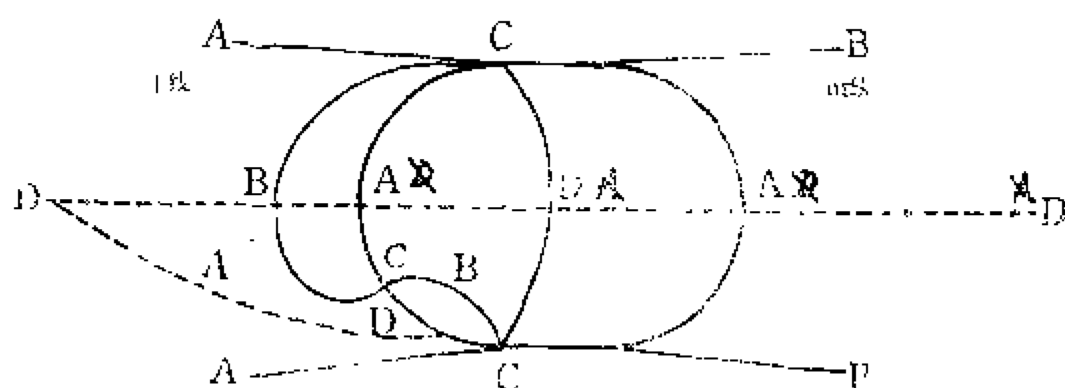


图 95

再继续演绎，至桥中桥为4线桥时，其结果为（见图96）：

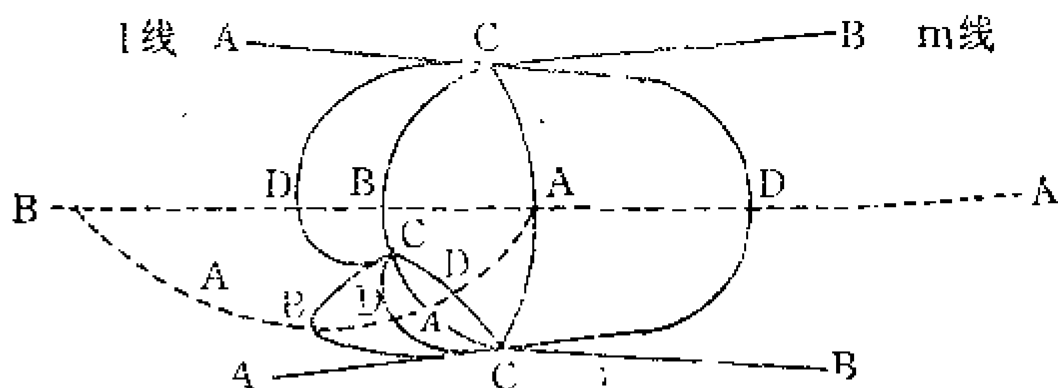


图 96

对上图，在子桥○CD中A换B，母桥线C—B与C—D变为非交叉粘连。略去多余线，则呈现非交叉粘连4线桥，桥中桥消失。再在桥○CD中A与B互换，略去多余线路，l线A—C与m

线B—C呈现非交叉粘连，母桥也消失。

△仍以m线与l线的对应比为1与1为例，第三步m线B—C与桥线C—D交叉粘连，演绎至下图（见图97），如在桥○CA中B与D互换，略去多余线路，即呈现l线A—C与m线B—C的非交叉粘连。

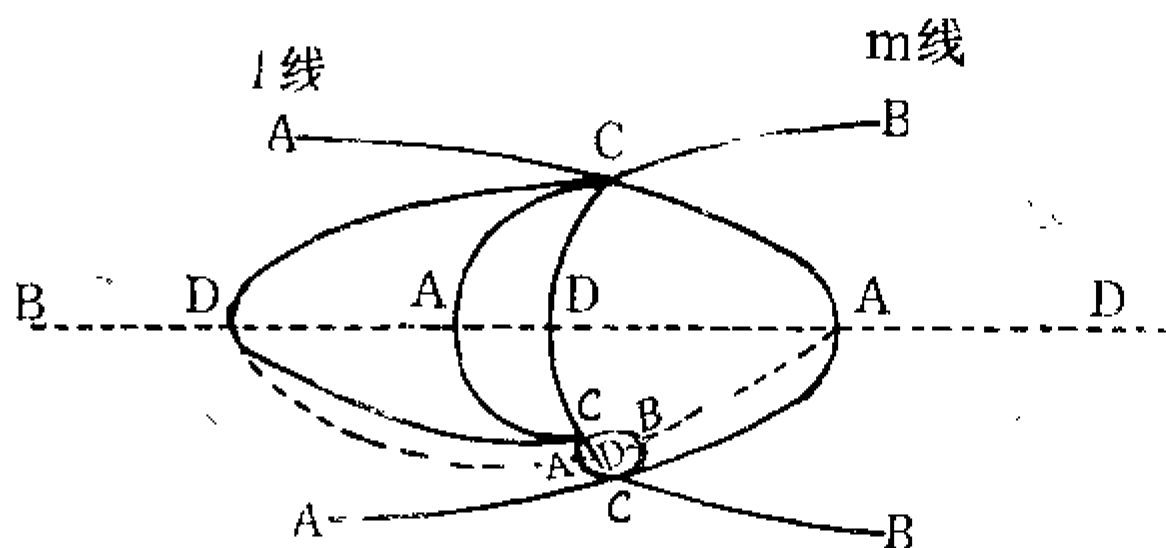


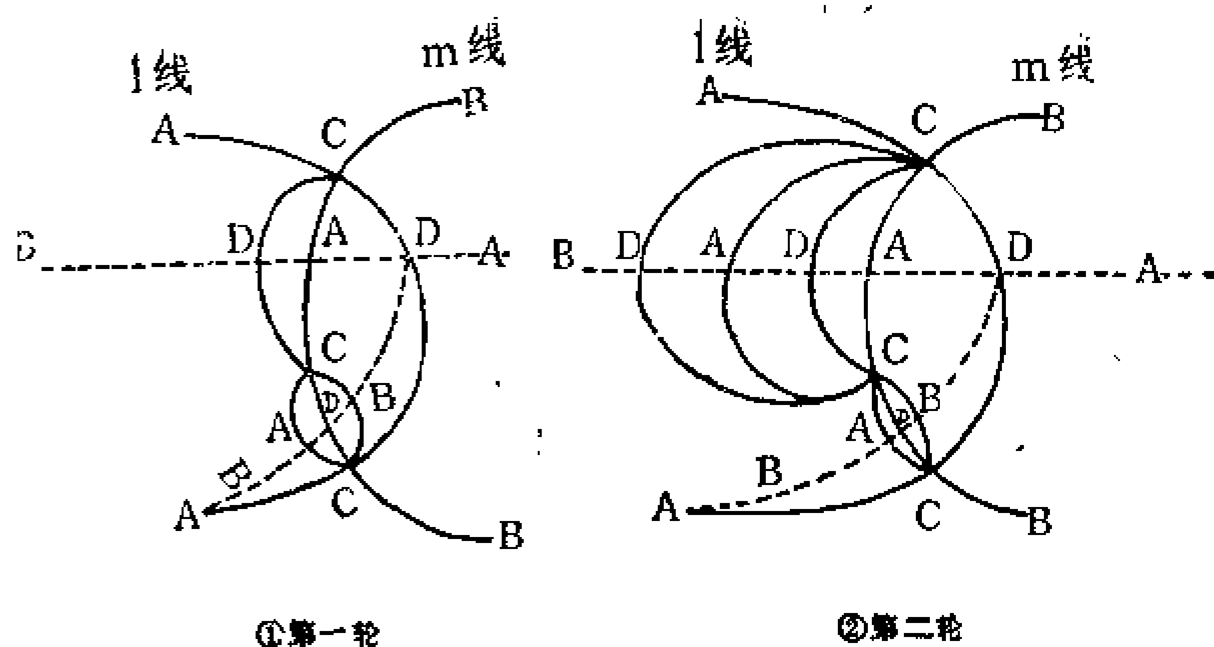
图 97

（c）子桥孕于母桥之中，进而取代了母桥，使母桥其余的线段一部分成为子桥外的非交叉粘连线段或引桥。

以二阶四色演绎中第一轮演绎为3线桥、第二轮演绎为4线桥的桥线交叉粘连为例（这种情况乃由于第一轮演绎并未使整个演绎过程完结）：

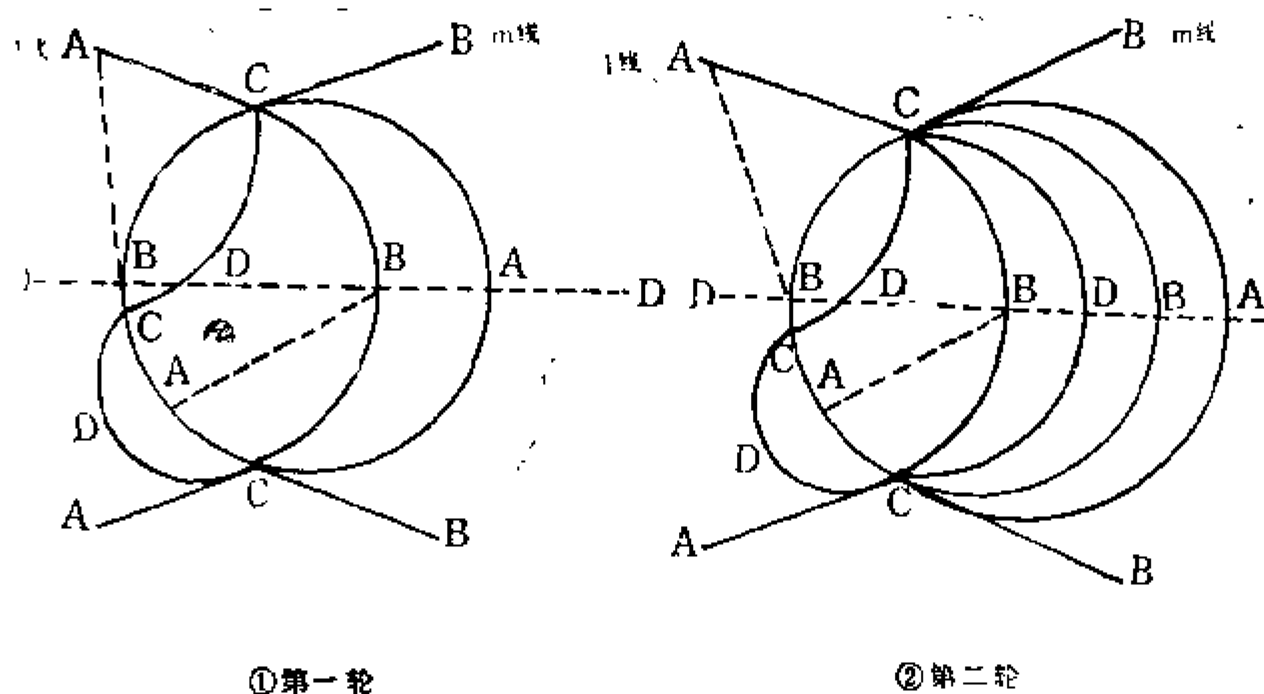
△m线与l线每一轮的对应比为1131（即从m线B—C开始，顺序m线走1次，l线走1次，m线走3次，l线走1次，并从第一次走l线A—C开始与m线B—C交叉粘连），其第一轮和第二轮演绎结果分别为图98。在第二轮图中，上部分的子桥取代了母桥，下部分的子桥为引桥。在子桥○AC中D换B，l线与m线为非交叉粘连。

△m线与l线的每一轮的对应比为3111，其第一轮和第二轮的演绎结果分别与图98相同。倘第一轮第三步m线B—C在图中自上而下从桥体中间穿出C—D线，其第一轮和第二轮演绎的结果分别如图99，呈上述（a）类图形。



①第一轮　　②第二轮

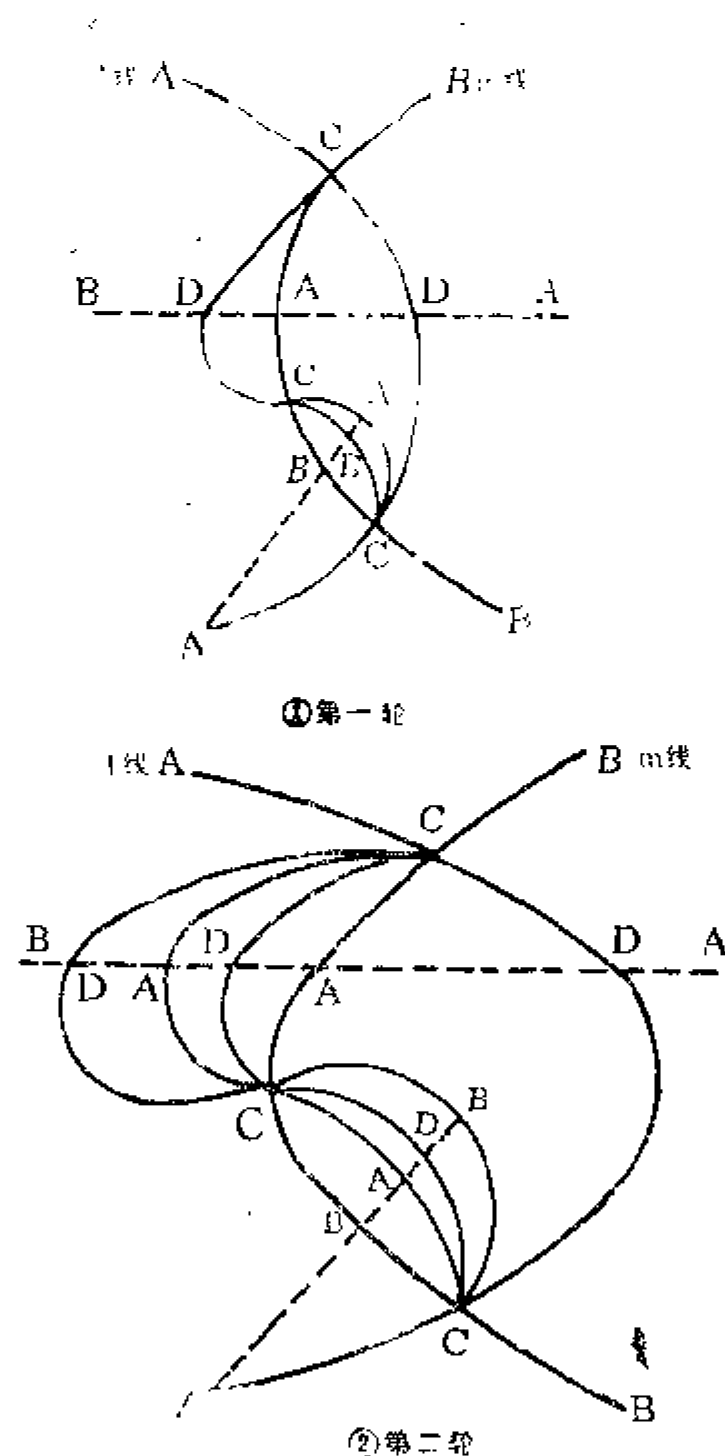
图 98



①第一轮　　②第二轮

图 99

△m线与l线的每一轮对应比为1113，其演绎结果与1131和3111相同。倘按1131第一轮演绎，但使第一轮第四步新拓A—C桥线经桥内右侧，其第一轮和第二轮的演绎结果分别如图100，呈上述（b）类图形。在上部的子桥○CD中A换B，下部的子桥○CB中A换D，略去多余线段，成非交叉粘连4线桥。



①第一轮

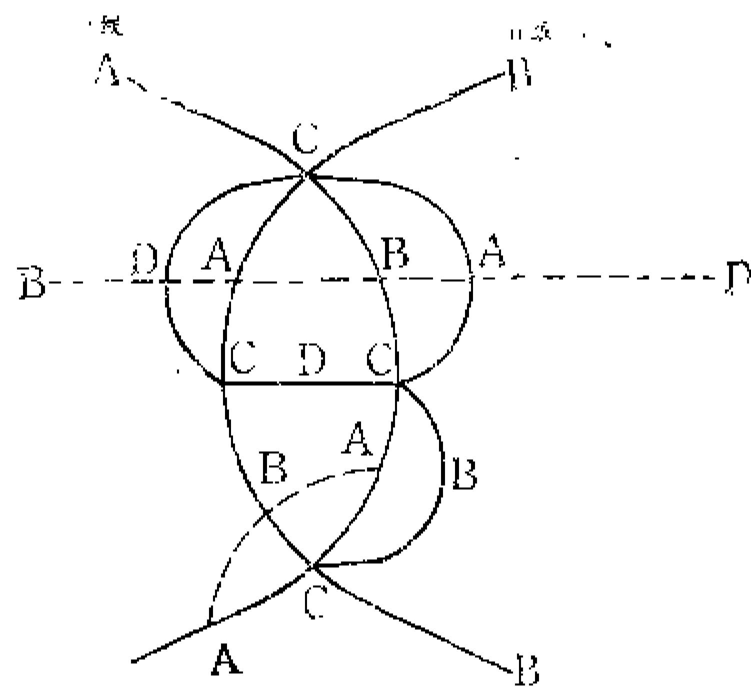
②第二轮

图 100

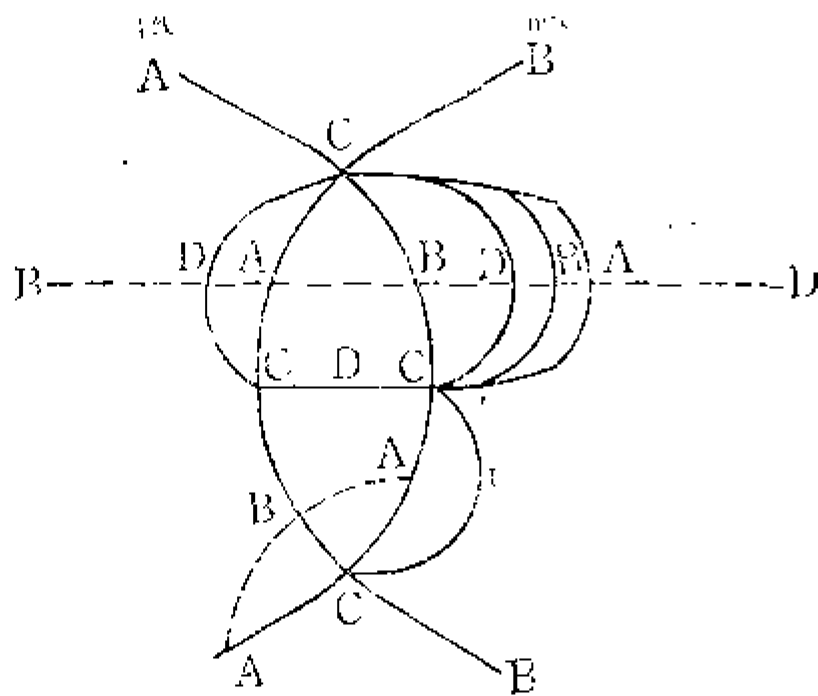
由此也可以看出，（ a ）（ b ）（ c ）三类图形是可以相通的，只是由于制约隐线的限制和主观选择上的差异，致使所走的具体线路不同而呈现了不同的形式。

至于一条桥线在演绎过程中穿断2条以至全部桥线，其演绎的结果也不外（ a ）（ b ）（ c ）三类图形。仍以m线与l线的对应比为1131所形成的桥中桥为例，第一轮第三步B—C穿断C—D

和C—A桥线，其结果为（见图101）：



①第一轮

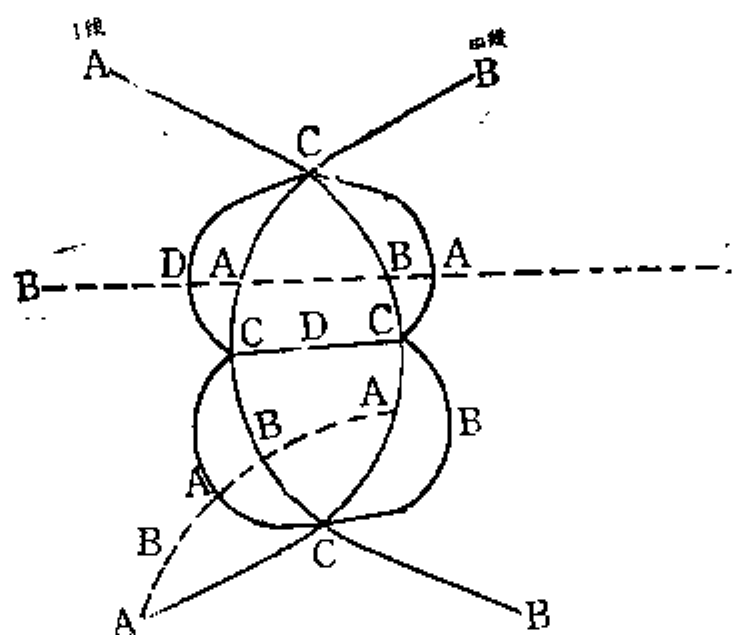


②第二轮a图

图 101

在②第二轮a图中，子桥取代了母桥。在上子桥○CB中D换A，略去多余线段，B—C与A—C呈非交叉粘连。

倘第二轮a图中第二步不连接右上侧A—C而连接左下侧A—C，第三步B—C走右侧线路，第四步A—C走左侧线路，则子桥与母桥共同形成B—C与A—C的非交叉粘连、见图102第二轮b图。



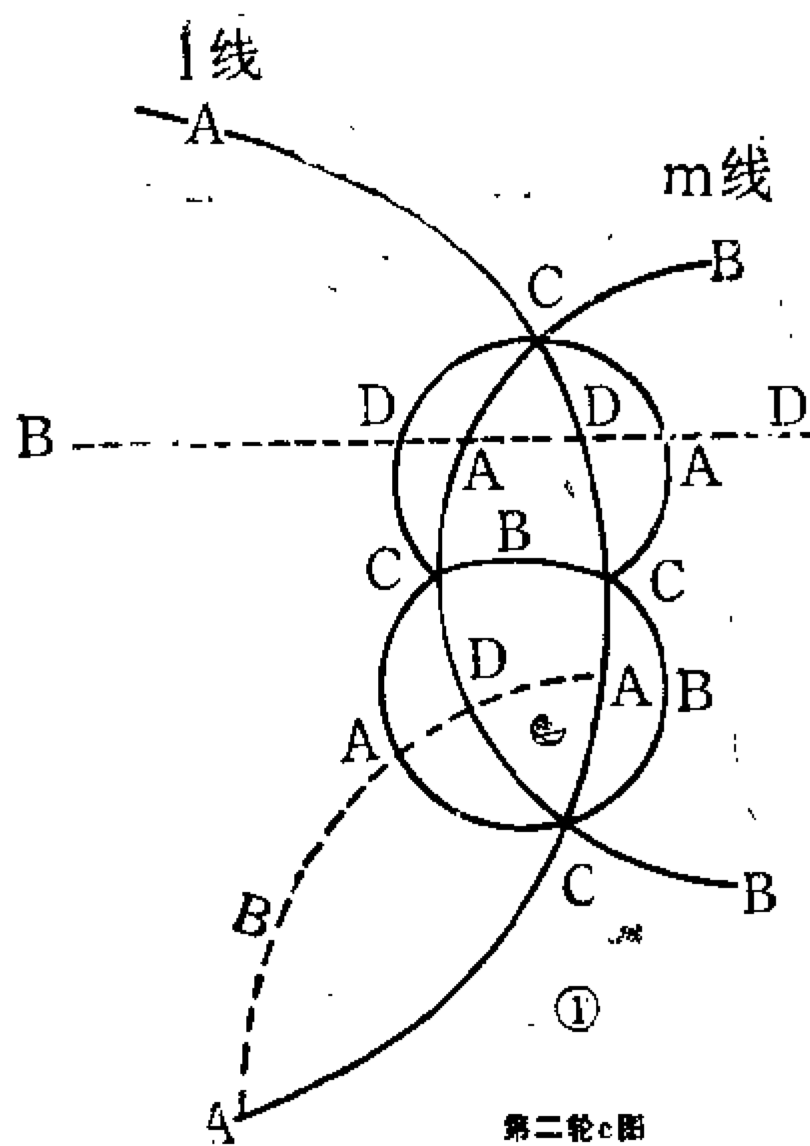
第二轮b图

图 102

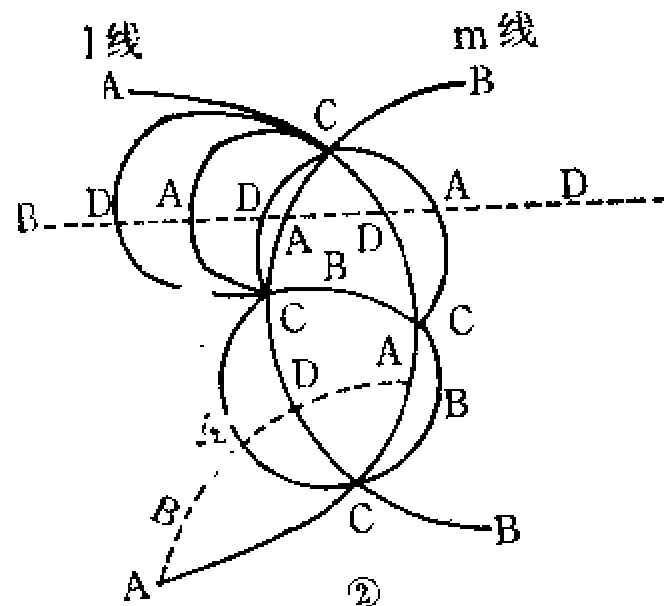
如果第二轮b图中第四步A—C走右侧线路，得第二轮c图，继续进行第二轮c图的下一轮演绎，则子桥取代了母桥，在左上侧子桥○CA中D换B，略去多余线路后为A—C与B—C的非交叉粘连图（见图103）。

关于（a）类图，如果在上述第一轮的演绎中，第四步A—C线可以在图右侧新拓母桥的大桥线，而且在第二轮演绎中A—C可以继续在图右侧拓新的大桥线，则必定可以形成。

从以上实际演绎中也可以看出：桥线交叉粘连，经按m线与l线的对应比进行演绎，有桥线交叉粘连的演变基因与没有桥线交叉粘连的演变基因相同。虽然所经过的实际线路有改变，但本质要求相同，最后所形成的桥的性质和桥线数也相同。在桥体的演绎过程结束后，从整个桥体来看，或者一部分桥线成为桥中桥起着原来桥体的作用，一部分桥线成为桥中桥的桥外非交叉粘连线段，还有一部分线段可作为废线弃去；或者，虽未形成完整的



第二轮c图



②接第二轮c图的第三轮图

图 103

桥中桥（如无隐线制约，继续演绎可形成完整的桥中桥），但子

母桥结合起来可使l线与m线变为非交叉粘连；或者，可以把桥线的交叉粘连抛在一边，继续形成大桥，子桥完全不起作用。这是由于：当桥线l与m发生交叉粘连，在演绎过程中起决定性作用的是m线与l线的对应比，并不因出现桥中桥而改变其为4线桥或3线桥的性质。

总之，桥中桥是由桥线交叉粘连引起的。桥中桥称为子桥，整个所在的桥体称为母桥。桥中桥的功能有二：或者变母桥的桥线交叉粘连为非交叉粘连，或者在形成桥中桥后整个取代原来的桥体，以保持二阶四色演绎中有关二色通道的畅通无阻。如果母桥的桥线过桥中桥受阻又不能拓新的大桥线，则二阶的20步演绎中断，按定理7和二阶20步的实证演绎可知，必有相反的二色线路形成二色圈，使线路图形变为二阶四色可解。在选择新拓桥线的顺序上，从母桥的整个桥体来说，如果能拓大新桥线则优先选择拓大的新桥线，对交叉粘连的两条桥线可视同一条桥线（因交叉粘连的两条桥线中总有一条是通的），继续进行演绎，从而使整个桥体成为与二阶四色演绎相适应的4线桥或3线桥。如不能，则在二阶多轮演绎中使桥中桥增拓新桥线，从而整个桥体仍为与二阶四色演绎相适应的4线桥（桥线≥4）或3线桥，者在相关的子桥中可控换色直接变桥线的交叉粘连为非交叉粘连，或者以子桥取代母桥，如均受阻不能实现，则因其为二阶四色可解，加以排除。因此，在桥体的二阶四色演绎过程中，重要的是看在整个桥体中能不能形成与二阶20步演绎相适应的线路，而能不能形成这种线路，最终是看能不能形成按m线与l线对应比所形成的4线桥或3线桥。成桥后经可控换色，略去多余线路，桥中桥就消失了。倘子桥中再出现桥中桥，只不过在演绎中多了一个层次，情况与上相同。由于有桥线交叉粘连的桥等价于无桥线交叉粘连的桥，因此，从宏观上说，在二阶四色演绎中，桥中桥的问题可以略去不计。

此外，还有一种桥外二色线路与桥线交叉粘连所形成的桥中

桥，其m线与l线分别为桥线和桥外来的二色线路，其演绎及结果与前述两条二色通道交叉粘连相同。从整个桥体来看，这种桥中桥和大桥的关系在性质上是两个交叉粘连的桥（两个桥的桥线交叉粘连），是兄弟桥，不是子母桥，其功能是在二阶四色演绎中分别保持3条二色线路中相应2条二色线路的畅通。下图（图104）是二阶四色演绎第一轮第五步A（u_4）——D（u_6）与C（v_5）——D（u_6）交叉粘连，第十一步C(v_1)——B(v_8)同上述第五步交叉粘连的桥线C—D发生交叉粘连，然后循序演绎至第二轮结束时的线路图。略去多余线路后，D（v_1）——A（v_5）为非交叉粘连二色线路，C（u_8）——D（u_4）同C（u_7）——A（v_5）的交叉粘连为3色3线桥。桥中桥消失。

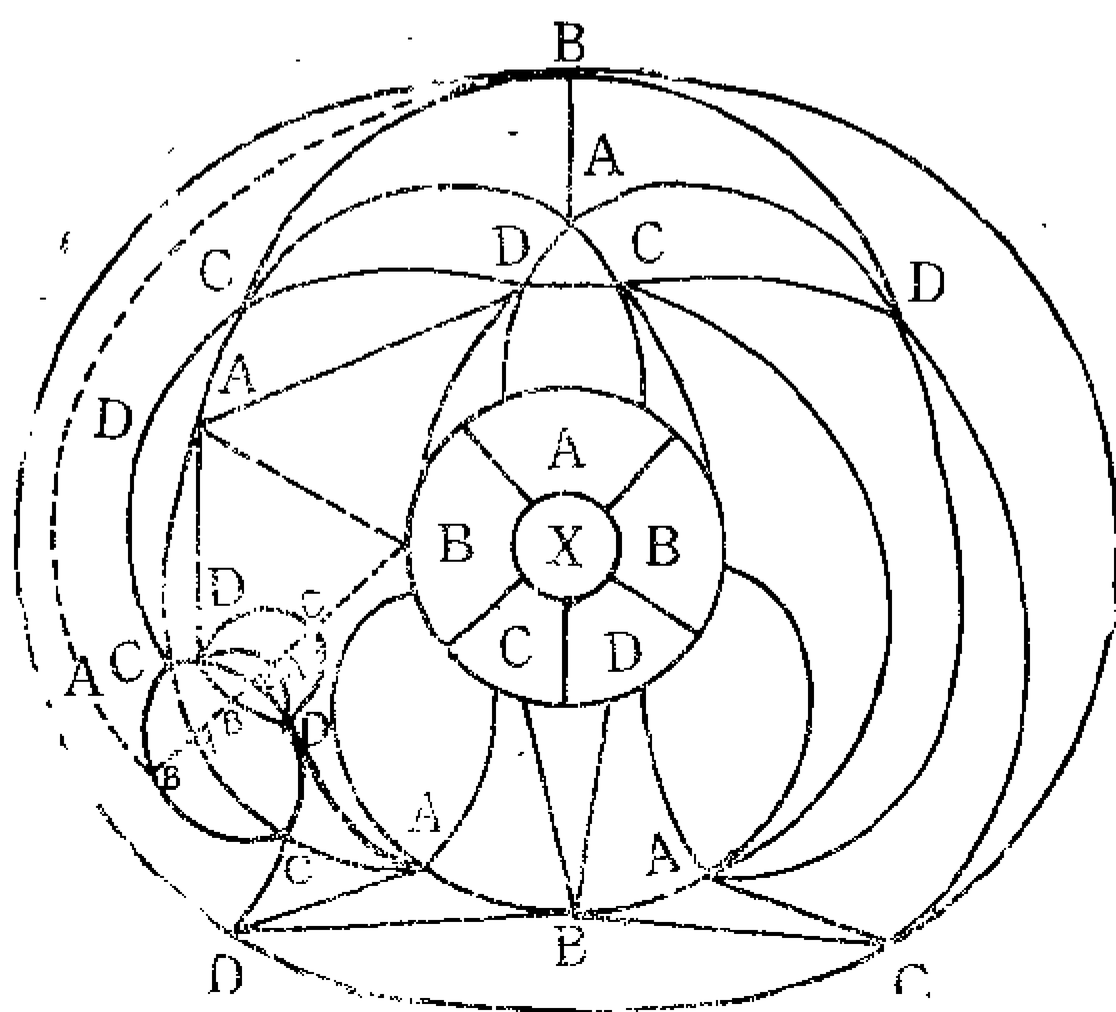


图 104

7. 死2色3线桥和非交叉粘连效应

上面举的m线与l线的对应比为1131、3111、1113的桥线交叉粘连，是二阶图N的复式图R_1在第一轮演绎中Ⅰ线范围内（含Ⅰ线自身）可能出现的3线桥的桥线交叉粘连，在多轮演绎中均可成为4线桥和变为非交叉粘连，用意是借此预先为三阶四色可解的证明扫除枝节性的障碍，在后面的三阶演绎不再重复提出这个问题。

当然，在Ⅰ线范围外（不含Ⅰ线自身），根据m线与l线的对应比不同，3线桥在桥线的交叉粘连中也会出现一些复杂情况。除有些经演绎仍为交叉3色3线桥外（如对应比为1212、121121、112112所形成的桥体），还会出现死2色3线交叉桥（即不可能变为3色3线桥和具有3色3线桥的功能）。如：m线与l线的对应为11211，无论一轮演绎或多轮演绎，结果均相同（见图105）。

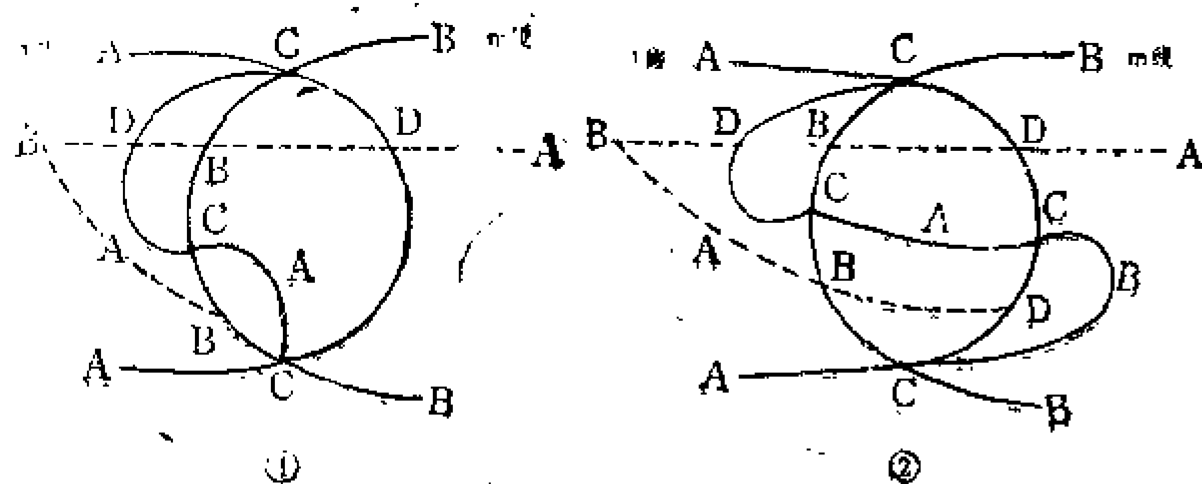


图 105

再如，m线与l线的对应比为1112111，其桥线交叉粘连的一轮与多轮演绎结果均为（见图106）：

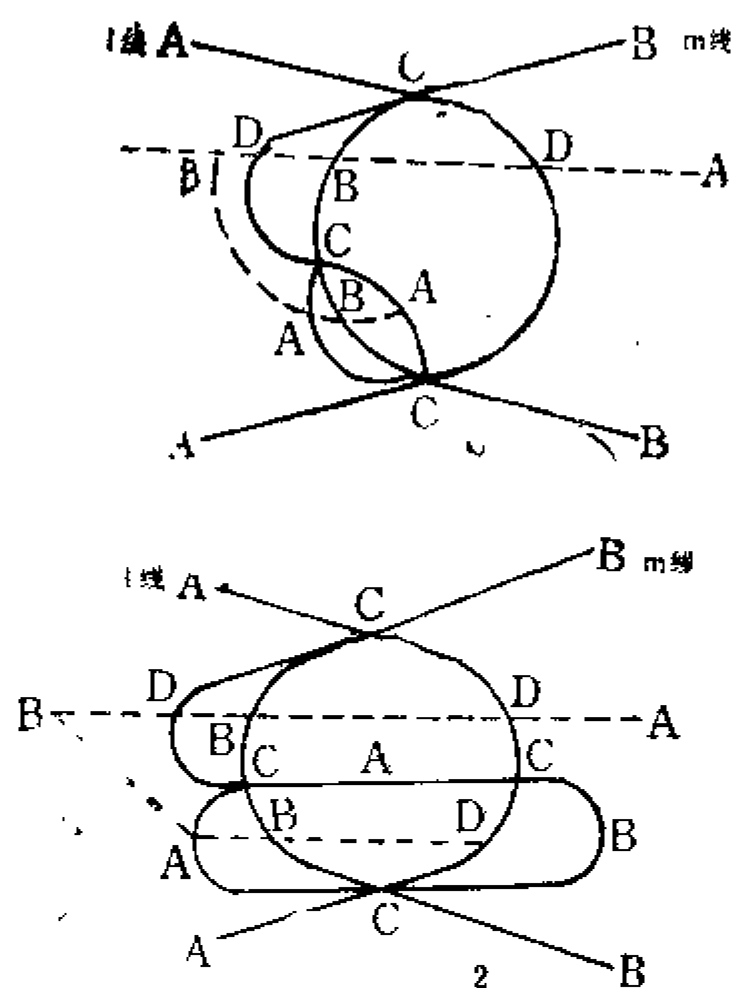


图 106

再如，m线与l线对应比为2121，其1条桥线与另2条桥线交叉粘连的演绎结果见图107（按对应比，其后要走2次m线B—C才走l线）。

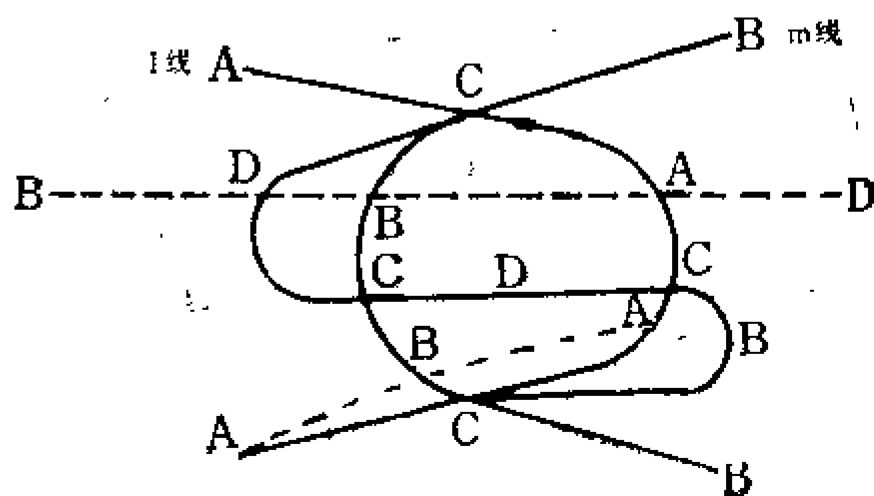


图 107

所有这类死2色3线桥均具有这样的性质：①在二阶图N的复式图R_1中，被交叉线m总是通的，否则在新一轮的演绎中必拓m线过桥的新桥线，从而改变桥的性质，或者桥断四色可解，与死2色3线桥的终极演绎不合。②现在的图形中m线B—C通而无论l线A—C通或者不通，但下一步按对应比走m线B—C进行可控换色后留走l线时，则l线A—C必通。否则l线过桥必拓新桥线改变桥的性质，或者桥断四色可解。死二色3线桥同连接X邻区的"并蒂线"有异曲同工之妙，其理也相通，只不过适应m线与l线对应比的差异，在演绎过程中当l线或m线的桥线断时另有必要的辅线供调节桥线时使用。从形式上看，这些桥线与二阶图N似乎不一致，实际上在演绎过程中完全一致。一条二色线穿过另一条二色线交叉粘连，经可控换色后，另条线必断，现在过这类死2色3线桥，按对应比走交叉粘连的一条线路经可控换色后另条线路通，其实际效果与两条二色线路未交叉粘连相同。我们称这种效应为死2色3线桥的非交叉粘连效应。这种非交叉粘连效应在任何3线桥中都是相同的。

8．二阶四色演绎中的交叉粘连与多轮演绎

在二阶图N的复式图中，由于交叉粘连所引起和形成的桥体是在演绎过程中实际形成的，到第一轮演绎（即交叉"并蒂区"1—20步的全方位转移）进行完毕时，复式图的整个形成过程并未完结，如桥体的桥线不全，基本线路不通畅，致使与二阶图N尚未一致，遇此情况还需继续进行新一轮乃至多轮演绎，直至使复式图可变为非交叉粘连二阶图N或准非交叉粘连二阶图N为止。准非交叉粘连二阶图N，就是说，保持交叉粘连的相邻两条二色线段所形成的桥体，要符合二阶图N中这两条线段的对应比和按这个对应比所能最终形成的桥体，使整个线路图形在三阶四色演绎中与二阶图N等价。特别要指出的是，在多轮演绎过程中，由于二色线路交叉粘连的复杂性，诸如一条二色线路穿过多

条二色线路与目标结点交会，在成桥过程中又受制约隐线的限制和必须使桥线穿过已有的二色线路，往往形成几个单桥的桥体交错、桥线共用和交叉粘连的情况（后面将作专题演绎和说明）。我们称这种情况为桥联体。对照二阶图N，从宏观上观察，即二阶图N的一个基本结点，散开为n个结点。在这n个结点之间有各种必要的桥线相连，以保持在四色演绎过程中二阶图N的基本线路相通。也就是说，在任何新的一轮演绎中不能使演绎受阻。否则，按定理7和二阶20步演绎，即为二阶四色可解。一个基本结点散开为几个结点，一般情况下，原基本结点仍为基本结点，其他散开的结点为非基本结点，在演绎完成后（包括在桥体自身进行必要的可控换色），非相邻两条线路的交叉粘连消失，略去多余线路即为非交叉粘连二阶图N或准非交叉粘连二阶图N。在某些情况下，原基本结点由于受制约隐线等的限制和不能提供必要的桥线，因而在演绎过程完成后，与二阶图N对照，不能起基本结点连接各基本线路的作用，而由原来的非基本结点起这种作用。因此，也会形成基本结点在位置和作用上向某个非基本结点的转移。

在二阶四色演绎中，两条相邻二色线段发生交叉粘连，总是先有被交叉粘连线m，后有交叉粘连线l。我们规定，每一轮相邻二色线段的对应比的排列是从被交叉粘连线m开始的，因此，当一轮演绎结束时，如果m线的桥线不通，可以断定整个演绎过程尚未完结，需继续进行新一轮的演绎。这是识别二阶演绎过程是否完结的一种简明方法。在4线桥中，包括4条桥线以上的桥，如有必要取得更多的桥线，虽然m桥线未断，仍可进行新一轮的演绎。至于通过桥体（包括桥联体）自身的可控换色可变交叉粘连为非交叉粘连者，则不必再进行新一轮的演绎。

下图（图108），已完成第一轮20步演绎，而图中之2色3线桥，从m线与l线按对应比的排列顺序来看，桥线中缺被交叉粘连的m线，因此知演绎过程未完，下一轮演绎时m线先过桥，必

形成4线桥。

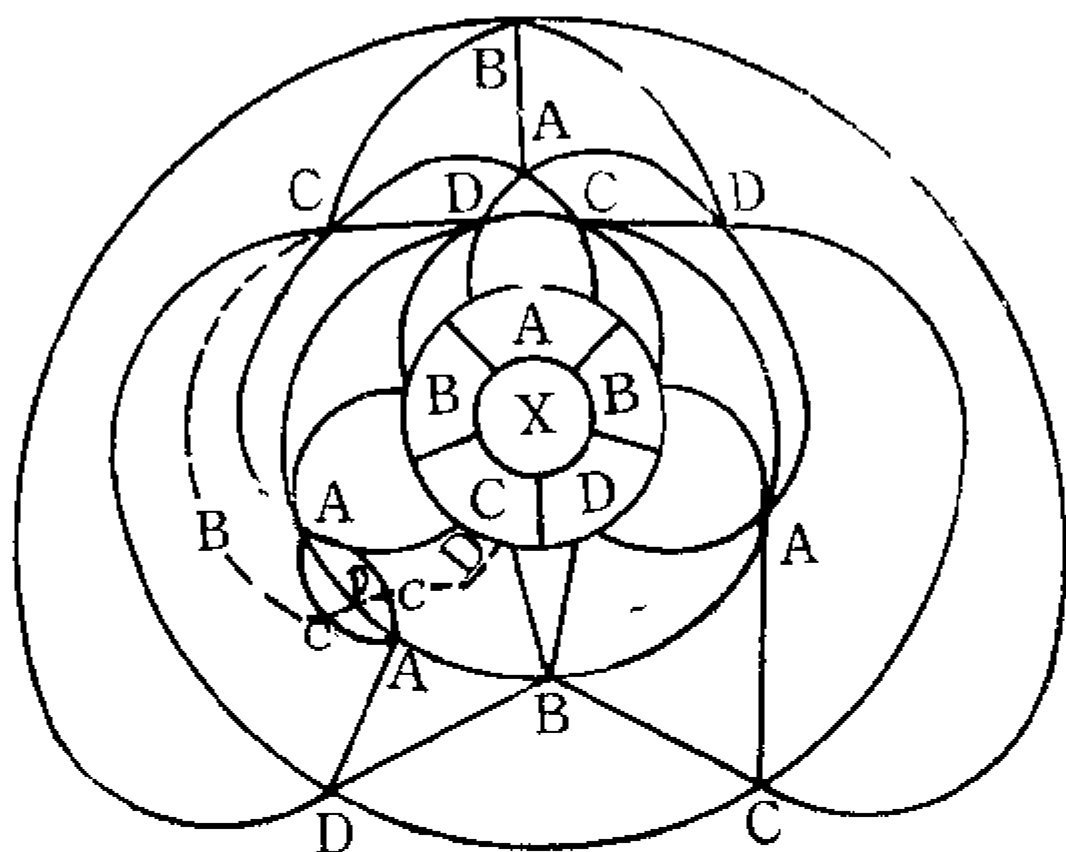


图 108

续图108进行新一轮演绎，至第三步，m线B—C先过桥，只能拓新桥线，使原2色3线桥变为4线桥（图109）。

至此，如果在桥○CA 中D换B，即可使B—C 与A—C的交叉粘连变为非交叉粘连。现仍令继续演绎至第二十步，按4线桥定理及其引理，并略去多余线路后，使图变为非交叉粘连二阶图N。

9．桥断使演绎受阻必为二阶四色可解

两条二色通道形成交叉粘连，在其后的演绎中，由于由隐线制约而桥断（不能拓新的桥线），从而破坏了二阶四色不可解线

路集合基准图N的基本线路关系，由定理7和二阶20步演绎可

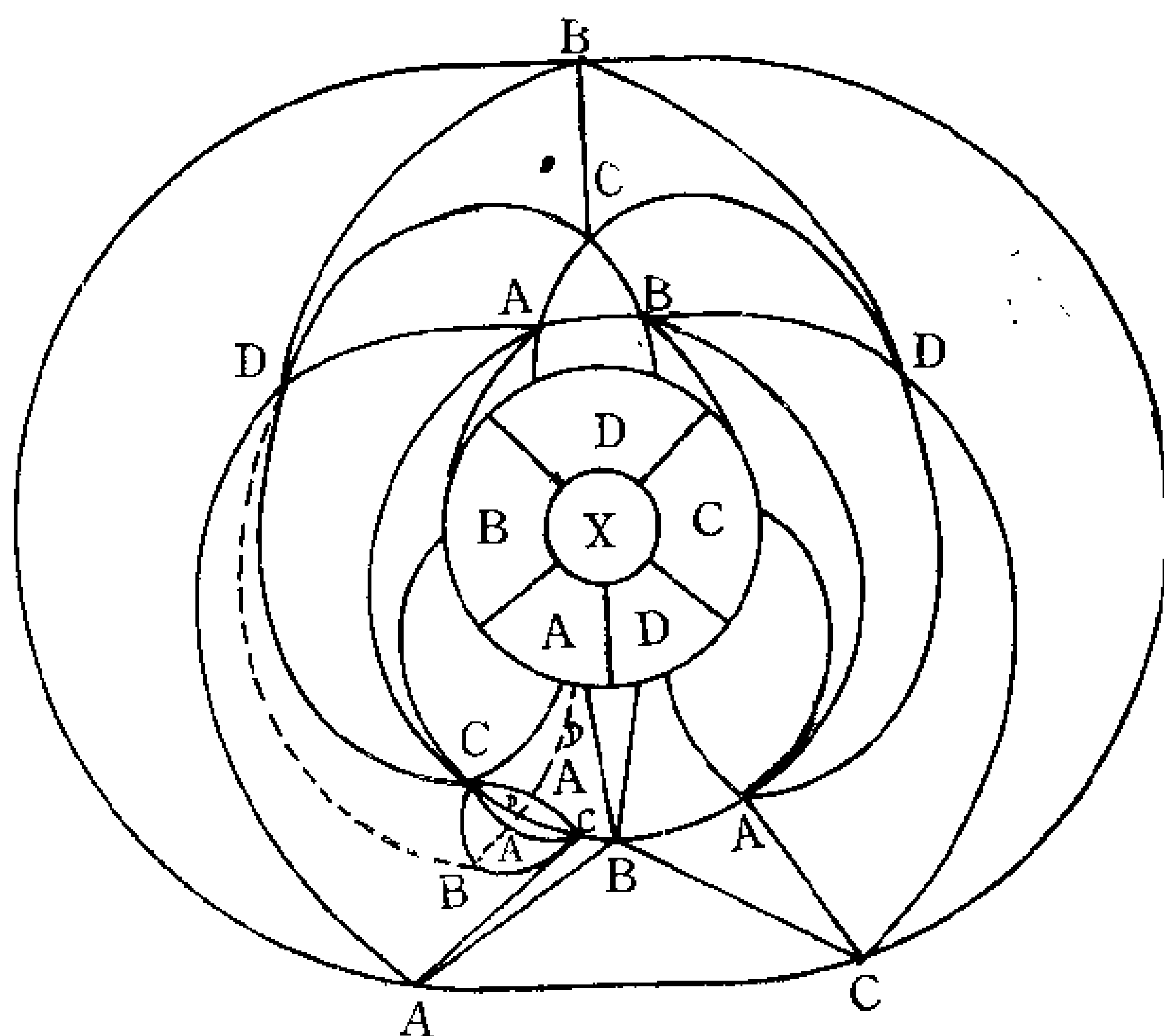


图 109

知，必为二阶四色可解图。下图（图110），二阶四圈可控换色演绎第十一步 B— C与A— B交叉粘连，第十三步 A—D因B……C制约不能拓新桥线，形不成○ACX与○ADX交叉“并带圈”，而在第十二步○CAX中可控换色后已形成了由显线和隐线连接成的○BCX四色可解圈；

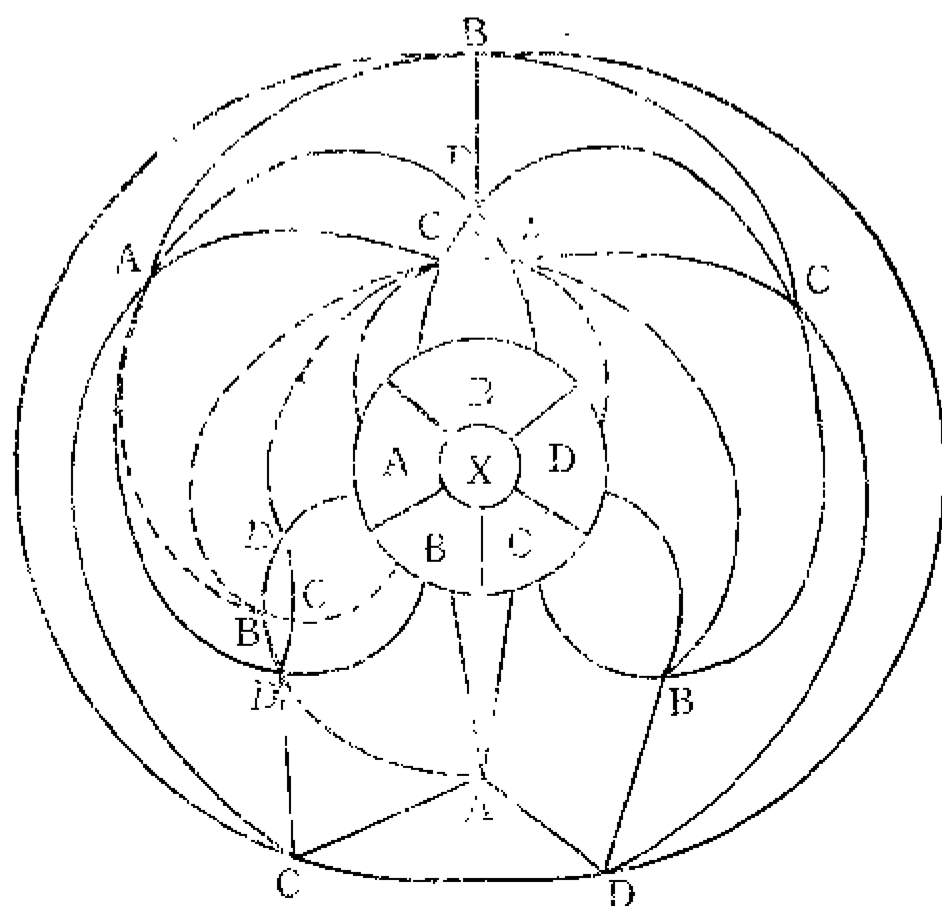


图 110

在上图中，如果第十三步A—D因受B……C制约不能拓新桥线，但又形不成○BCX四色可解圈，因制约隐线C……B的C端不在v_1，另外可以有违反二阶图N基本线路的A—D线穿过A(u_1)—C(v_1)连于D(u_1)，形成另一个○ADX，见下图(图111)。

经继续演绎，至第十七步已形不成○ADX和形不成○ACX与○ADX交叉“并常图”，而于第十六步可置换色后形成了由显线和隐线连接成的○BCX两色可解圈。见下图(图112)。

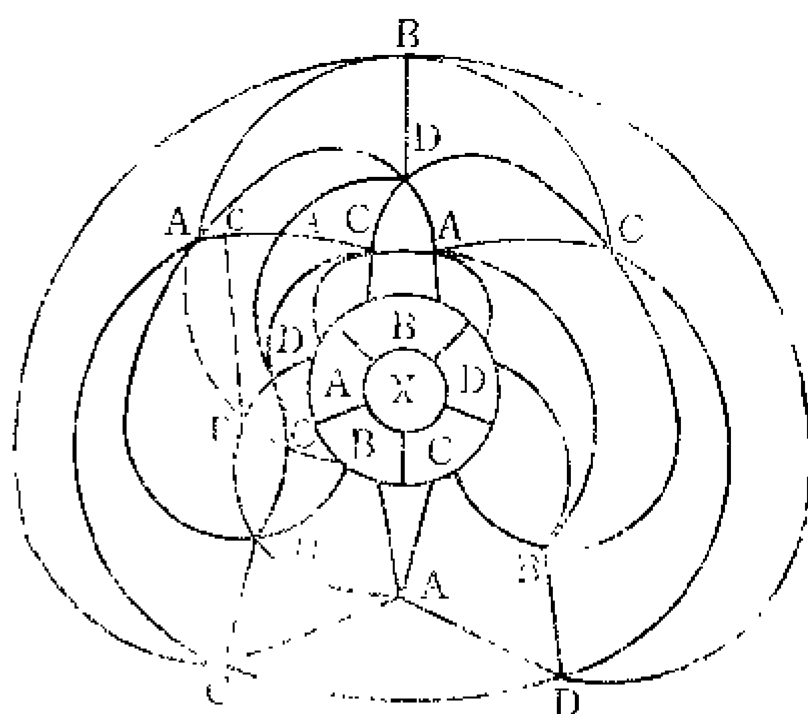


图 111

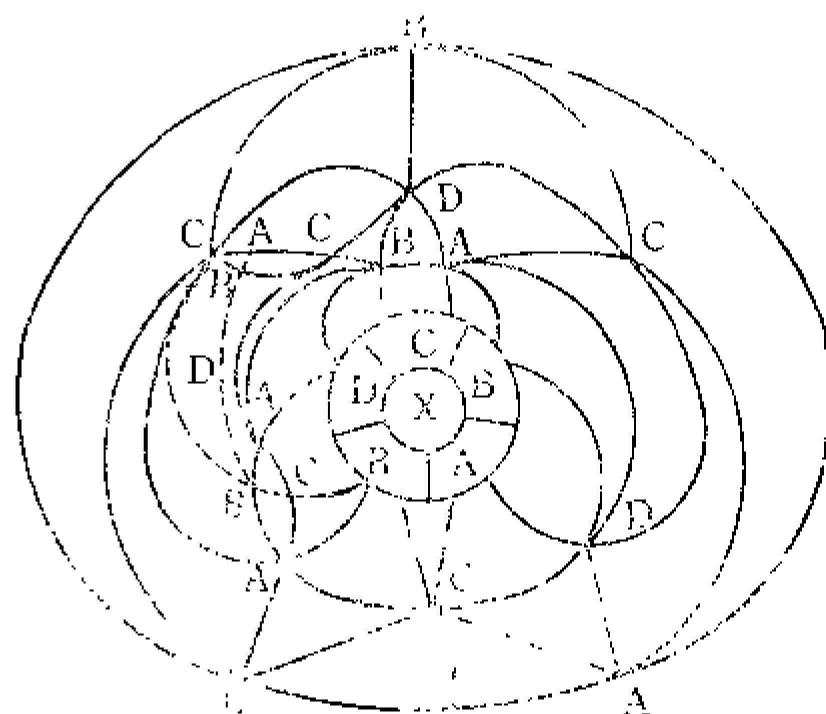


图 112

10．二色线路按基准图N走不到位必为二阶四色可．

在演绎中，二色线路必须按二阶基准图N走到位。如因过桥受阻不能到位，走捷径连接成圈，则必有相对立的二色隐线嵌套

桥体，在其后的演绎中形成四色可解圈，因而为二阶四色可解图形。

下图（图113）为在二阶四阖可控换色演绎中，第十一步B—C线穿出B—D返回又穿过A—B交会于B（v_8），第十三步连接○DAX时，因不能按二阶基准图N所示线路走到v_8位，中途走捷径连接A（V_8），继续演绎至第十七步时不能形成○ADX与○ACX交叉"并带圈"，而形成由了显线同隐线连成的○BCX四色可解圈，为二阶四色可解图形。

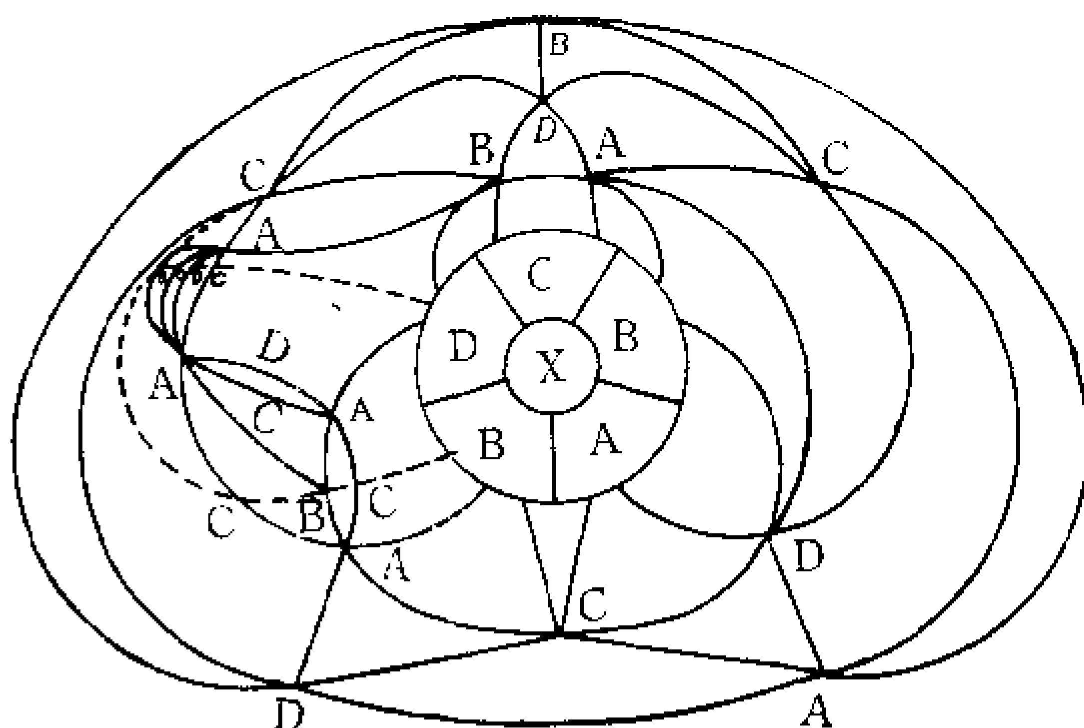


图 113

11．非相邻二色线段交叉粘连的消失和非相邻基本二色通道交叉粘连定理

与二阶图N相对照，非相邻二色线段在演绎过程中尽管可能出现交叉粘连，但在二阶演绎结束时必能使这种交叉粘连剥离或

成为非交叉粘连。因为如果l线穿过2条或2条以上的m 线与非相邻的二色通道交叉粘连，同时又是l线分别与被穿过的每条m线的交叉粘连。由于l线在穿过2条或2条以上的m线进行可控换色后，原支撑隐线的情况发生变化，l线与被穿断的相邻的m线在其后的演绎中可以从交叉粘连形成这两条线之间的桥，直接连接目标结点，不再继续走同非相邻二色线交叉的旧道。原来被l线穿断的其他m线，在其后的演绎中，按保持二阶四色演绎线路畅通的需要，分别成桥。所有这些桥共同构成一个各结点的填色与基本结点的填色相同的桥联体。如果受到其他制约隐线和第二条m 线两个方面的限制，被l线穿断的相邻的m 线不同能l 线形成二阶演绎所需要的足够的桥线，则l线与相邻的m线沿原穿过相邻m线的l线段的旧道交叉粘连成桥，形成了相邻m线与基本结点（l线的直接目标结点）的转移。其他原被l线穿断的m线，则按照二阶四色演绎的需要和制约隐线的状况成桥。因此，同样可以使l线同相邻的m线交叉粘连成桥，而同非相邻的二色线段脱离交叉粘连。所有这些桥同样构成一个各结点填色相同的桥联体。

此外，还有一种特殊情况，如果一条二色线段同非相邻的二色线段交叉粘连，并且又同其间相邻的二色线段共处在一个单式桥体中，则形成三条二色线段的混合交叉粘连。这种情况只存在以v_1为基本结点的$v_1—u_6$、$v_1—v_5$、$v_1—V_6$的3条二色线段中，和以v_2为基本结点的$v_2—u_2$、$v_2—v_3$、$v_2—V_2$3条二色线段中，其形成的条件为：在二阶四色演绎过程中，一条二色通道穿过另一条二色通道初步形成了一个基本结点和呈V—4E的4条基本线路，其后又有两条相邻的基本线路交会于这个基本结点。其他基本结点和相关的基本线路不具备这种条件。3条二色通道在一个单式桥体中混合交叉粘连，经二阶四色演绎，可形成5线或5线以上的单式桥体，在桥体自身可控换色后，必使3条二色线段成非交叉粘连。

由此得出：

非相邻基本二色通道交叉粘连定理：非相邻的基本二色通道在二阶四色演绎过程中所形成的交叉粘连，在二阶四色演绎结束时可以不粘连或变为非交叉粘连。

下面，分别进行二阶四色演绎加以说明。

①l线与相邻的m线交叉粘连成桥，可直接连接目标结点。

下图（图114），在二阶四色演绎中，第十一步从C（v_1）至B（v_6）新连接的C—B线（l线）受支撑隐线的制约，接连穿过A—B、B—D、A—B（m线）交会于目标结点A（v_5），形成了l线同非相邻m线的交叉粘连，然后与已有的B—C线相连成○BCX和形成○BDX与○BCX交叉“并蒂圈”：

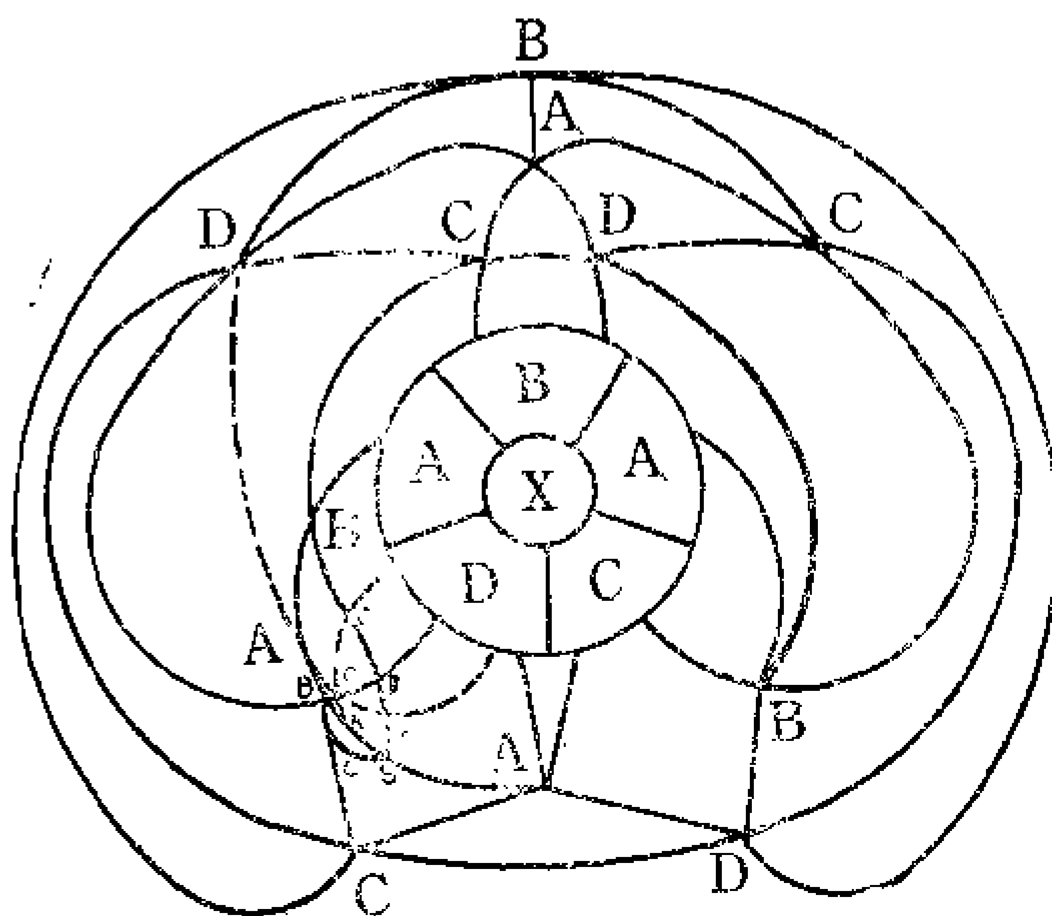


图 114

接图114继续进行演绎，至第二十步第一轮演绎结束时，其图形如图115。第十一步穿过3条m线形成交叉粘连的l线，因同时也与相邻的m线交叉粘连，在第一轮演绎结束时与相邻的m线形成4线桥，原穿过3条m线的l线成为其中的一条桥线。被l线穿断的其他m线也分别成桥（桥线尚不充分）。各桥共同形成一个桥联体。

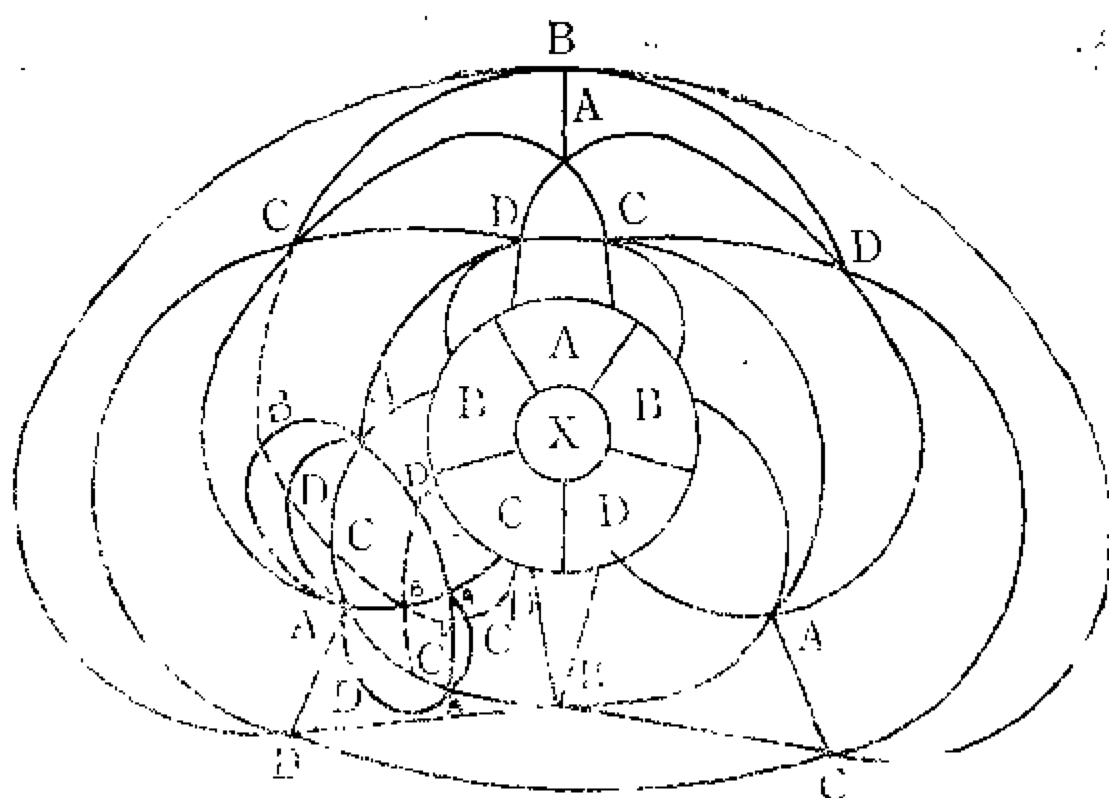


图 115

图115显然还需进行新一轮的演绎，因B（v_4）至A（v_5）基本线路上的桥线缺A—B（被l线交叉粘连的m线尚未恢复），整个演绎过程尚未完结。但从整个联桥体来看，演绎也可到此为止。因为在联桥体的○AD中B与C互换填色后，使A—B连通，略去多余线路即成非交叉粘连二阶图N。

②l线与相邻m线沿l线段交叉粘连成桥形成基本结点的转

移。

在图115第十一步之后的演绎中，l线与相邻m线沿 V_6—v_6 交叉粘连成桥在两侧分别受到新的制约隐线的遏制和相邻二色基本线的路限制，不能新拓必要的桥线，则只能转向沿着原来穿过m线的l线继续拓新桥线（如果不能，则为二阶四色可解），至第二十步被迫走成下面的图形，则形成基本结点A（v_5）在A（v_5）——C（V_4）线上分离为二的状况（见图116）：

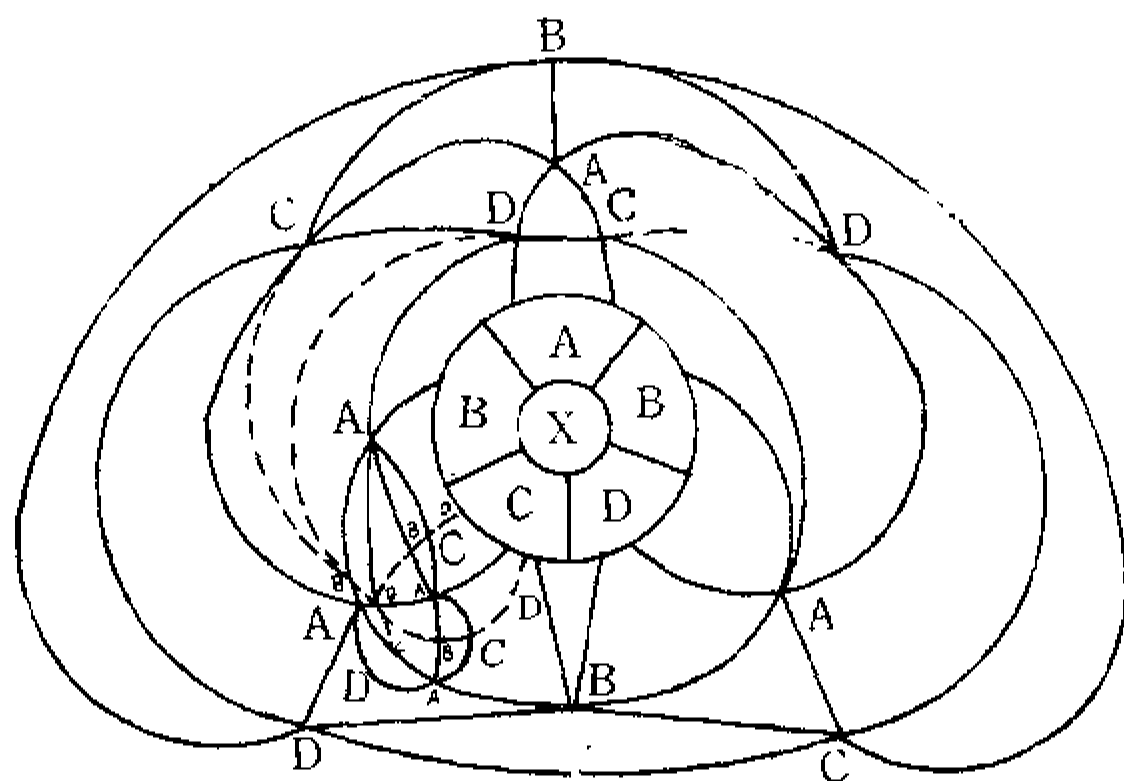


图 116

图116演绎过程显然未完结，需继续进行第二轮演绎，至第二十步得图117（第十三步A—D走桥的前方线，第十七步A—D走v_6—V_6线。各步均按基本结点不变的常规走，有现成线路的不要另拓新线路）：

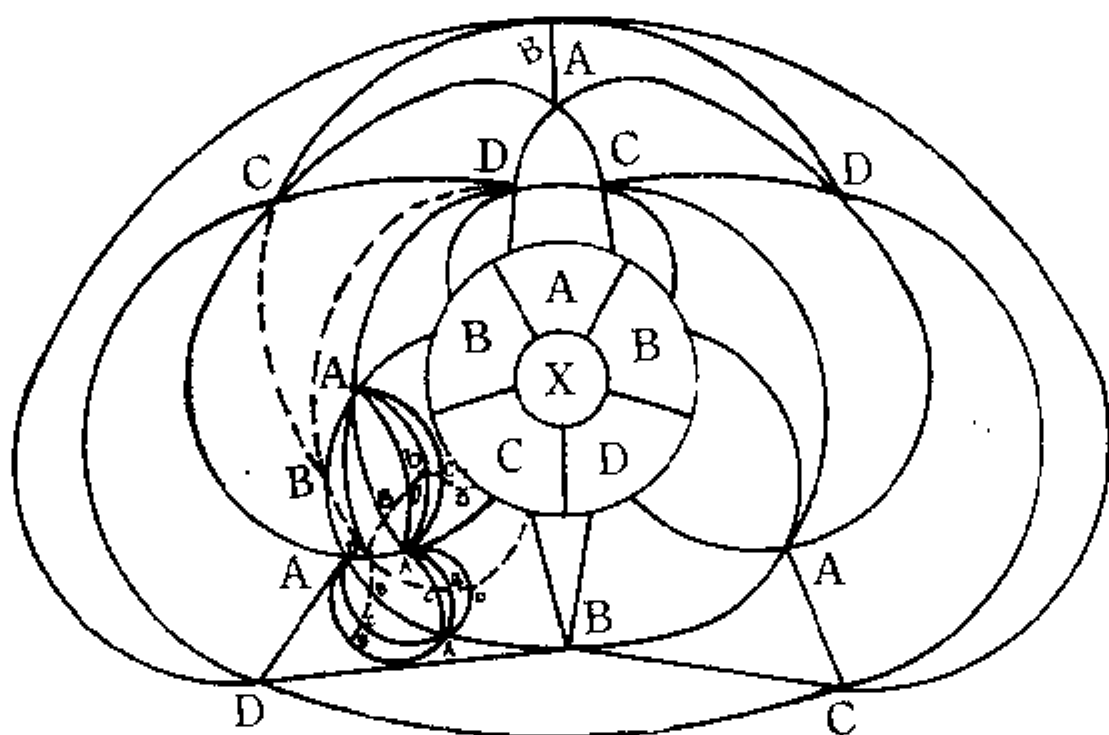


图 117

图117中，在桥联体左上侧和下部连通的○AB中C与D换，略去多余线路，即成非交叉粘连二阶图N，只是基本结点A（v_8）的位置发生了变化，转移到原v_5—V_4线上的非基本结点A。这种基本结点的转移是由制约隐线等的限制引起的，不能被l线穿断的原相邻m线（V_5—v_5）获得足够的桥线直接与原目标结点v_8连接成桥线够用的桥，而只好沿着穿过多条二色通道的原l线成桥。在这个过程中，仍需坚持按基本结点未变的情况选择线路，如果在多桥联体中走乱了桥线，就可能在演绎过程中产生桥联体的自我调节效应，虽经多轮演绎，却往往陷于循环往复之中，不能拓出足够的桥线形成新的基本结点，自然也不能变交叉粘连为非交叉粘连，只能使这个桥联体象个“瘤子”存在于二阶图N的复式图中。当然，我们也可以将这种桥联体缩微，将它整个作为一个基本结点看待，即将几个分散开来的结点合而为一，其内部线路联系（保证能维持二阶四色演绎的进行）

作为另一个层次的问题处理。不过，我们还是以化解这个"瘤子"，作为同一个层次的问题处理为好。

另外，如果继续坚持进行新一轮的演绎，在桥线更充分的情况下，仍可使基本结点恢复到原来的位置，但C（V_4）—A（v_5）中的部分线段要向外微移位。

③非相邻两条二色线段的先期交叉粘连可以剥离。

在二阶四色演绎过程中，由于某些基本线路尚未形成，对照二阶图N，某些非相邻的两条二色线段可以先期交叉粘连，其后当隔于这两条非相邻二色线段之间的基本线路穿出时，必然形成两条l线先后穿过一条m线并形成3条基本线路混合交叉粘连的情况，使桥成为3条基本线路的色线束，我们称这种桥为3条二色基本线路的公共桥（简称3线共桥）。3线共桥需要5条桥线才能在任何情况下经桥体自身的可控换色调整，使混合交叉的3条基本线路的交叉粘连互相剥离，成为这3条线路的非交叉粘连。对此，我们可以用穷举法得到证明。因为在有5条桥线的公共桥中，我们可以取得任何所需要的三条不同色的桥线的排列。下面是具体证明：

4种颜色共可组成3条不同色的桥线，要取得任何所需要的三条不同色的桥线的排列，在桥体自身的可控换色中共需要3×4＝12种色线的排列供选择。

让我们具体计算一下5线桥可以提供的色线排列数。在5线桥体中，外层的两条桥线不可能在桥体自身的可控换色中改变颜色，在排列上计为2条。与外层桥线相邻的2条内桥线，如分别舍去一条无关的外桥线不顾，按4线桥定理，可各具有2条不同色线的性质，在排列上计为2×2＝4。中间的一条桥线，如分别舍去外层桥线中的一条桥线，按4线桥定理，在色线排列上，为适应一侧相邻色线的变化可具有2×2＝4次不同色线变化的可能性，但由于每条桥线的变化最多只可能有3种色，必有一种是重色，故将中间这条桥线颜色的变化和排列次数先计为3，而适应两侧相

邻色线的变化，在排列次数上共计为3×2=6。这样，2+2×2+3×2=12。

由于5线桥的排列变化数符合取得任何所需要的3条不同色的桥线排列的要求，从而得出：

5线桥定理：在5线桥中，经过桥体自身的可控换色，可以得到任何所需要的3条2色桥线的排列。

5线桥引理：3条二色通道在5线桥中混合交叉粘连，经桥体自身的可控换色，可变3条线路的交叉粘连为非交叉粘连。

下图(图118)，二阶四圈可控换色演绎，第五步D—A(u_5v_1)穿过B—A(V_6v_1)成○ADX和形成○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”：

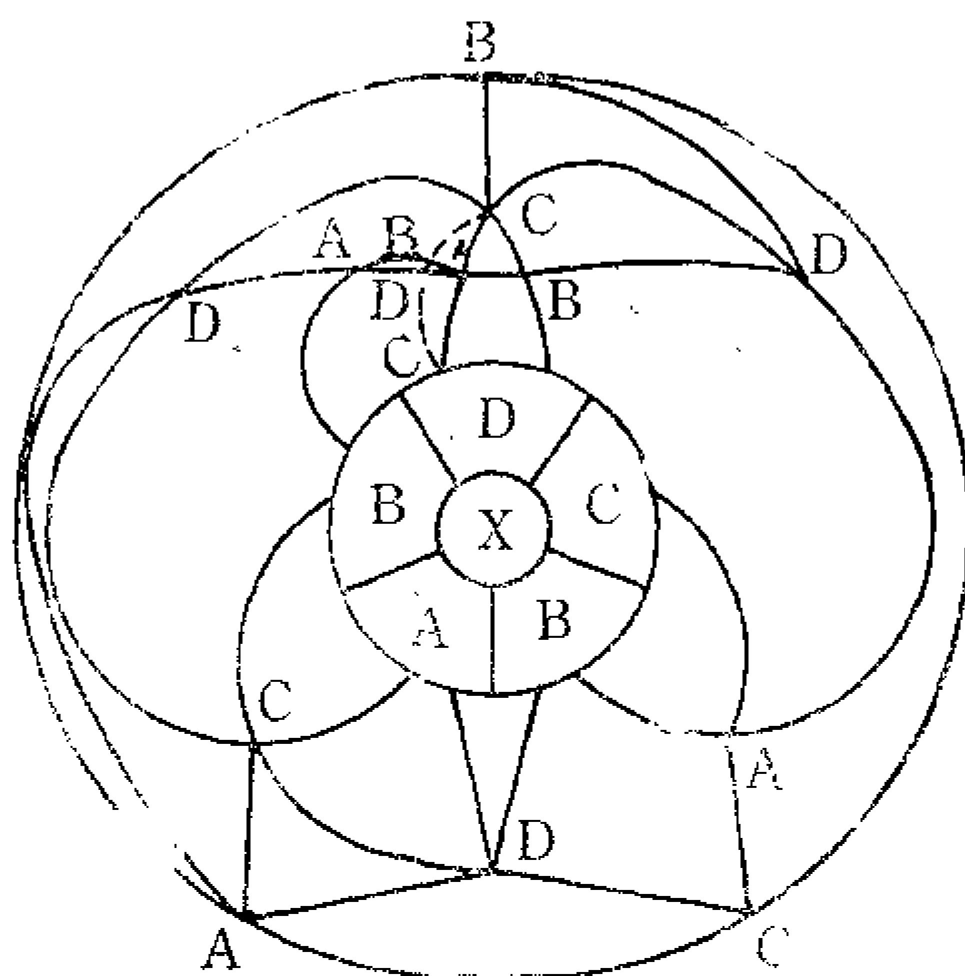


图 118

A对图118，在○ADX中可控换色后，继续循序演绎。设第八步A—C走桥外新拓桥线（桥○ABD中B与D有隐线相连，不允许—C通过）。再继续演绎至第十一步，B—C从已有的桥的下线通过，与标准图N相比，形成桥线A—C与B—C相互易位现象。演绎至第十二步，A—C到位后（至v_1）再沿原线退回（可视为线粘连）与X邻区A（V_8）相连。演绎至第二十步得图119。

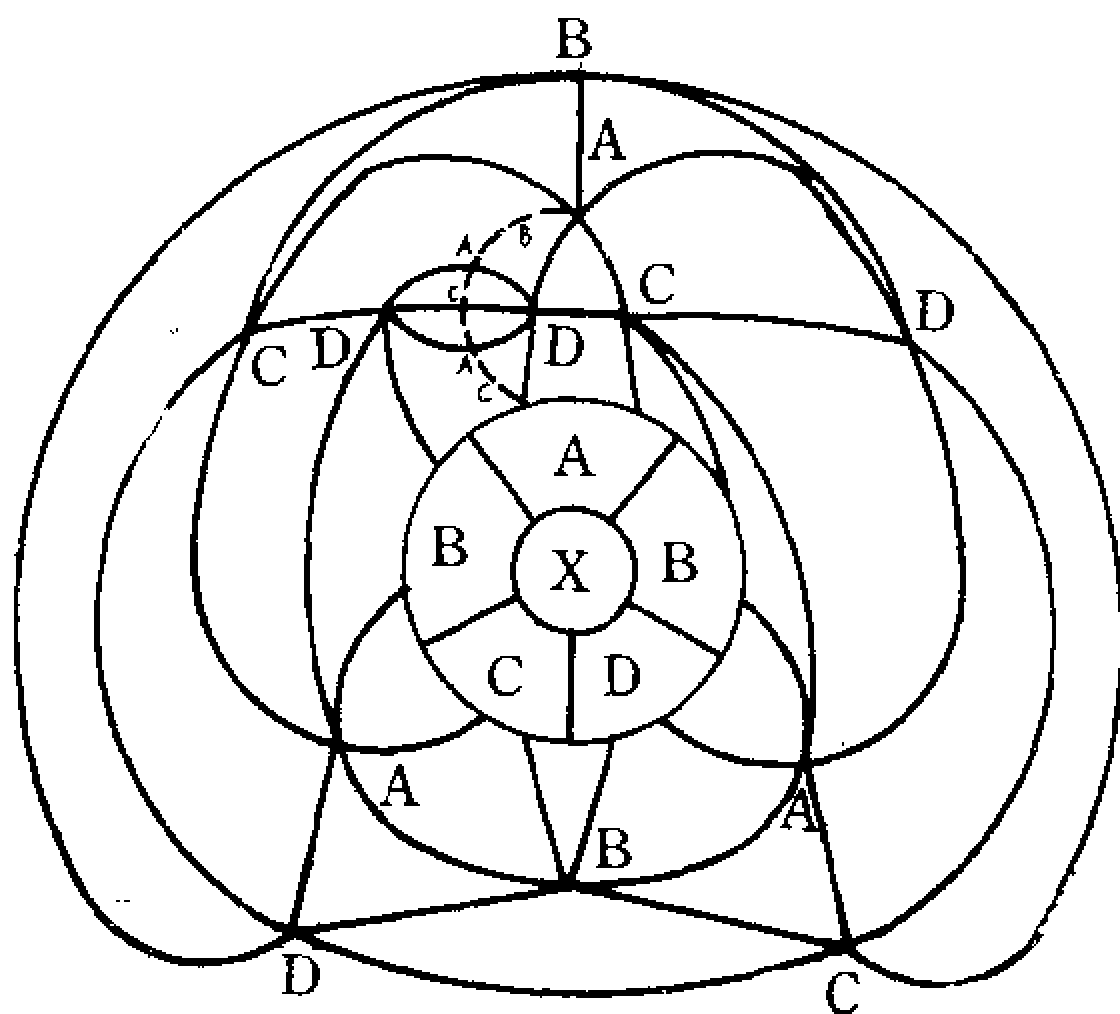


图 119

图119显然未完（左侧V_6 v_1缺m线B—D）继续进行下一轮演绎，得图120。图中桥体下半部○DA中C换B，略去多余线路，即呈现非交叉粘连二阶基准图N：

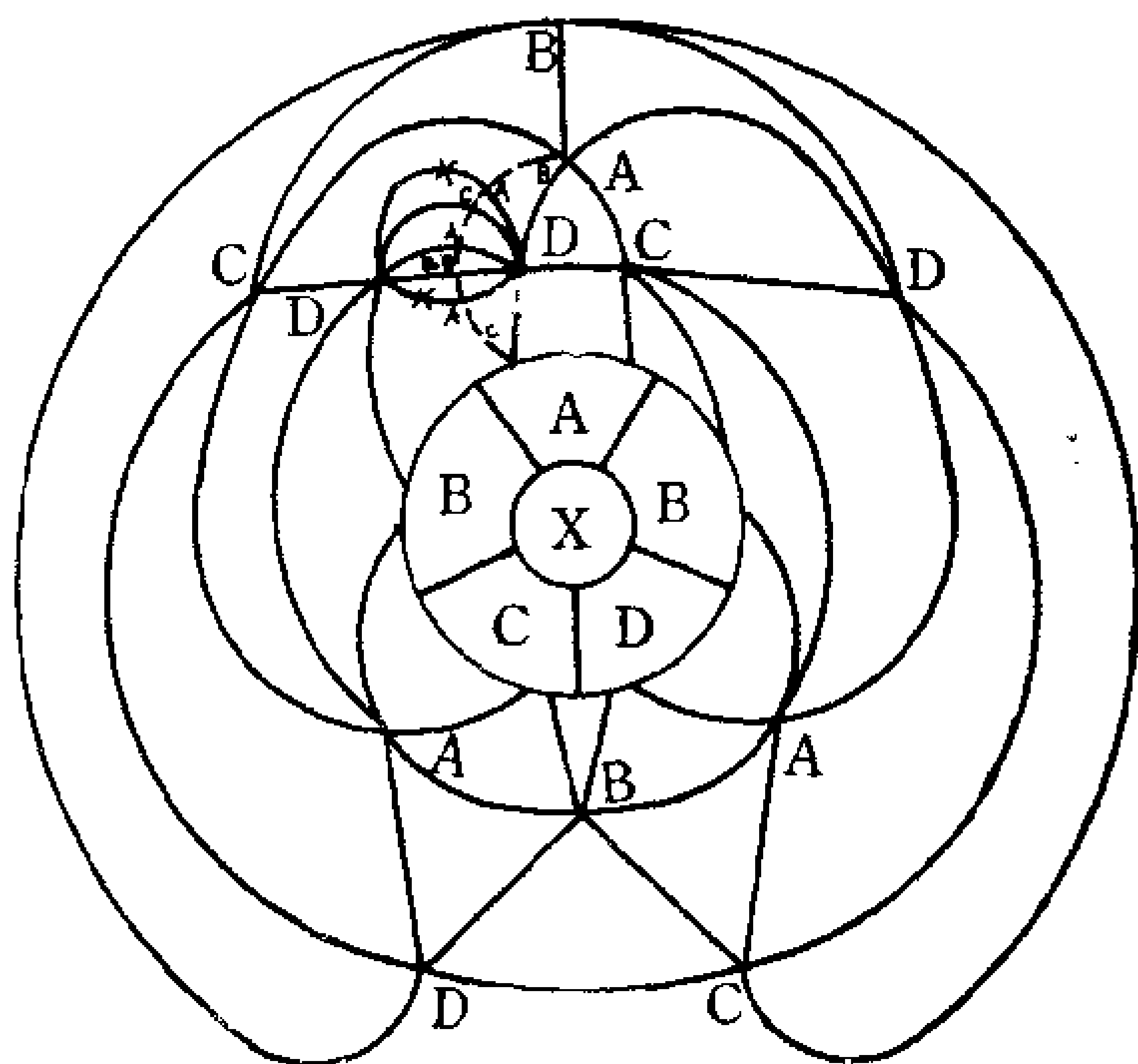


图 126

（注：过桥时遇有相同的二色桥线，均取靠近开拓新桥线一侧的线）

12．“抽刀断水水还流”

在演绎中，一条新拓的二色通道因受隐线制约不能与应连接之基本结点连接，而象“抽刀断水”般接连穿过多线，交会于其他能形成该二色圈的基本结点，看来似乎破坏了二阶标准图N的基本结点和基本线路的布局，经演绎，不过是“抽刀断水水还流”，只要能形成二阶四色不可解线路图，16个基本结点及其基本线路的关系是不会改变的。

△下图为，第十一步始于C（v_1）的新拓B—C线连接穿过A—B、B—D、A—B、A—C、D—C在原图形外交会于C（u_4）与C—B相连，形成○BCN，经演绎至第二十步，得图121：

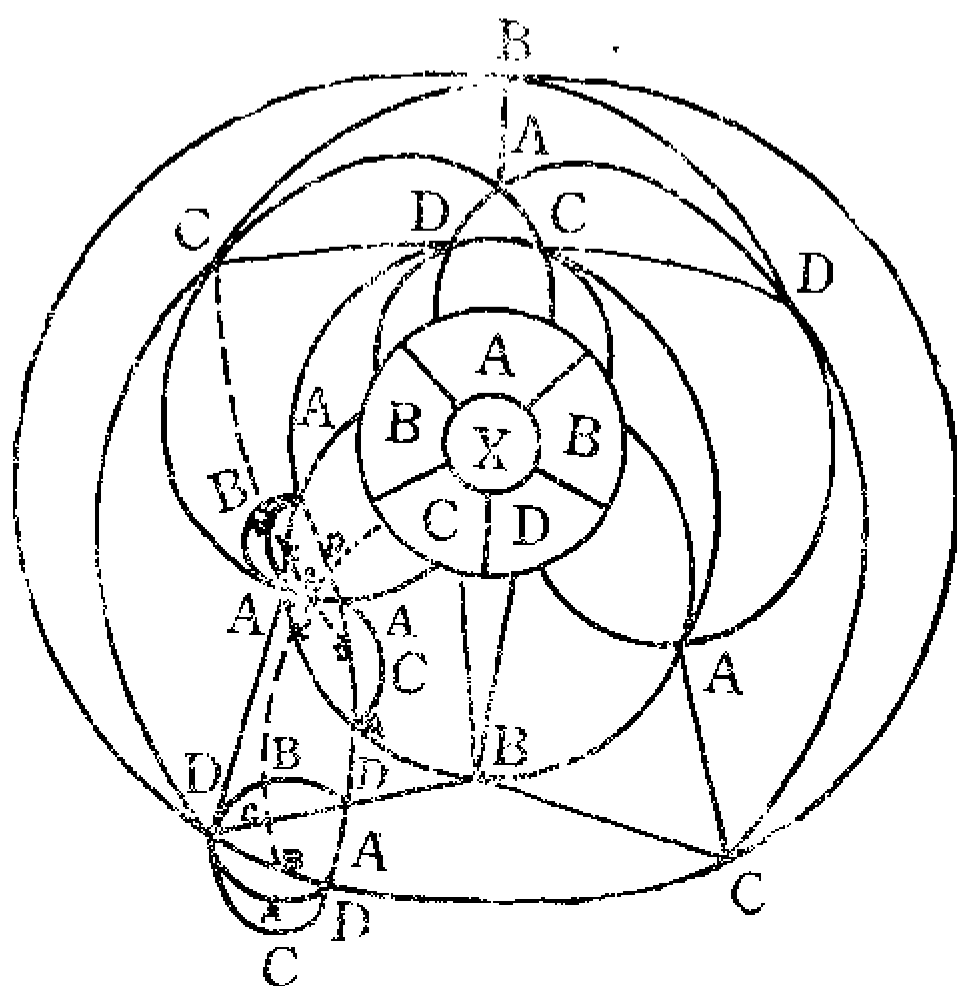


图 121

图121的桥体是两个相连的桥联体，在A（v_5）和D（u_4）两个基本结点中，A（v_5）分散出3个非基本结点，D（u_4）分散出2个非基本结点。两个桥联体由○AD串连着。在桥体○AD中可控换色，略去多余线路，即呈非交叉粘连二阶图N。

△下图为，二阶四圈可控换色演绎第十一步从C（v_1）新拓B—C线穿过B—D时不与B（v_5）交会，而是穿过B—D后交会于C（u_4），演绎至第二十步，得图122：

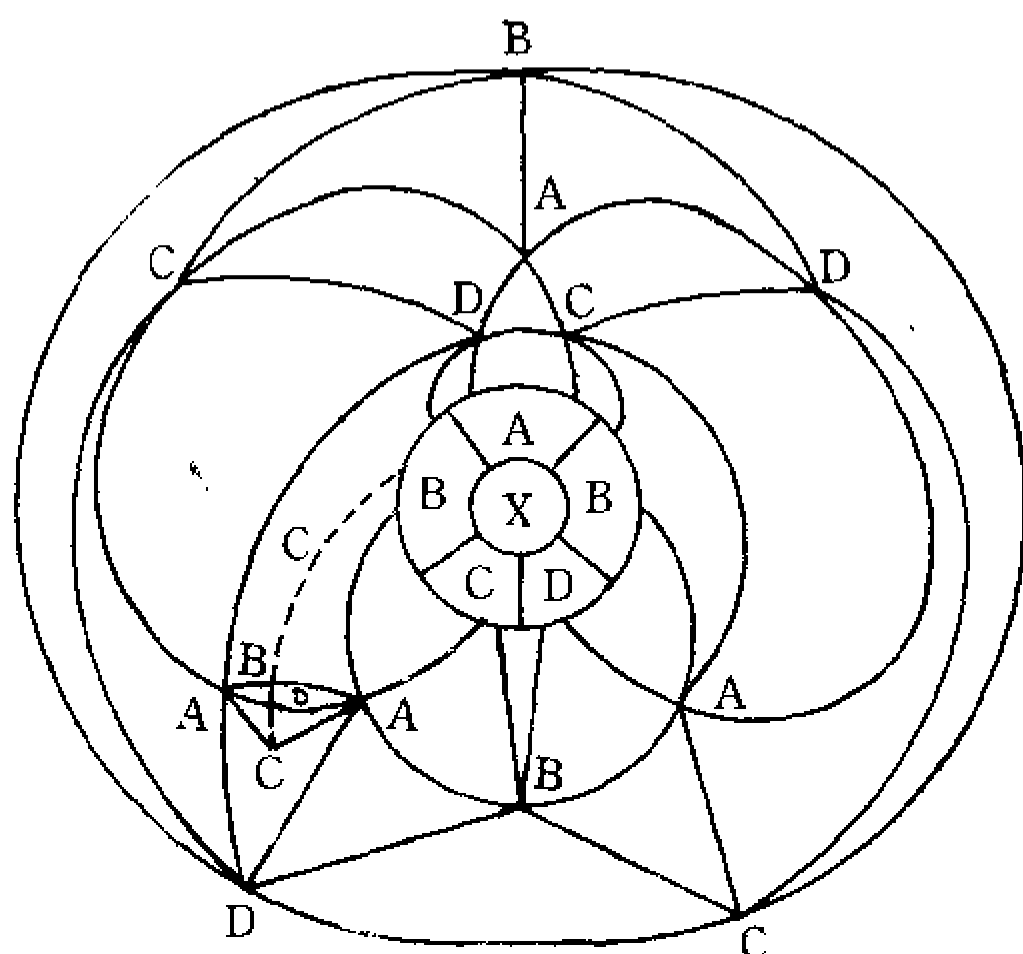


图 122

图122中，略去多余线路后，呈现非交叉粘连二阶图N。

△下图为，第十一步从C（v_1）新拓的B—C接连穿过D—B、C—D与图左下侧C（u_4）交会后形成○BCX，经演绎至第二十步得如下图形（图123）。略去多余线路，即呈现非交叉粘连二阶图N。

△下图为，第十一步从C（v_1）新拓的B—C接连穿过B—D、C—D与与最外侧B—C线中部之B色点相触连通后形成○BCX，经演绎至第二十步得如下图形（图124）。略去多余线路，亦呈

现非交叉粘连二阶图N。

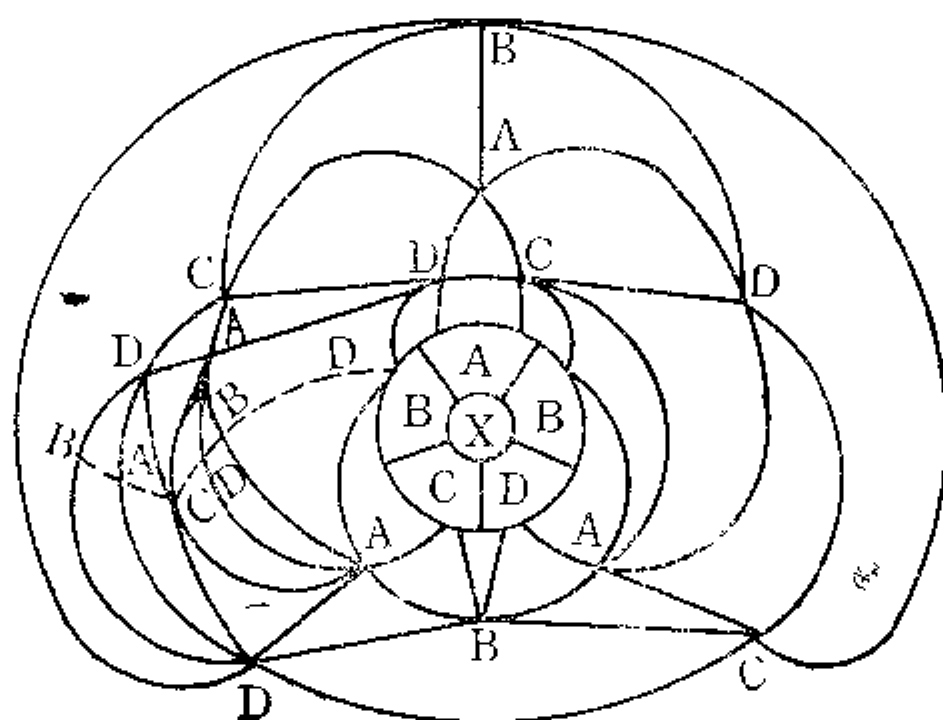


图 123

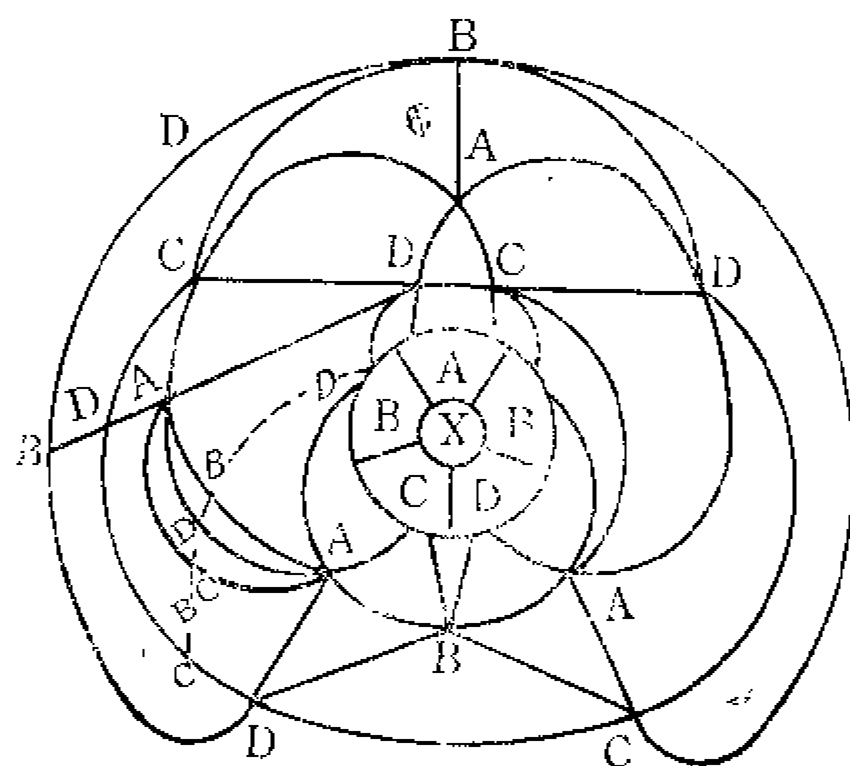


图 124

13．割"盘肠肿块"

二阶四色不可解线路集合基准图N的复式图，可以非常复杂，部分线路可能象盘肠一样，在基本线路两侧盘肠迂回，或者桥线交错形同肿块。但不管怎样复杂，怎样盘肠结块，在整个演绎过程中，必须坚持按基本线路形成线和桥。这样，在演绎结束时，由于在演绎过程中开拓出新桥线（否则二阶四色可解），通过略去多余线路定可将这些"盘肠肿块"割掉（"盘肠肿块"不包括Ⅰ线内两条"并蒂线"自身的各种交叉粘连）。

下图（图125），二阶四圈可控换色演绎，第十一步B—C线从v_1始，穿过其他线路盘转交叉至v_2：

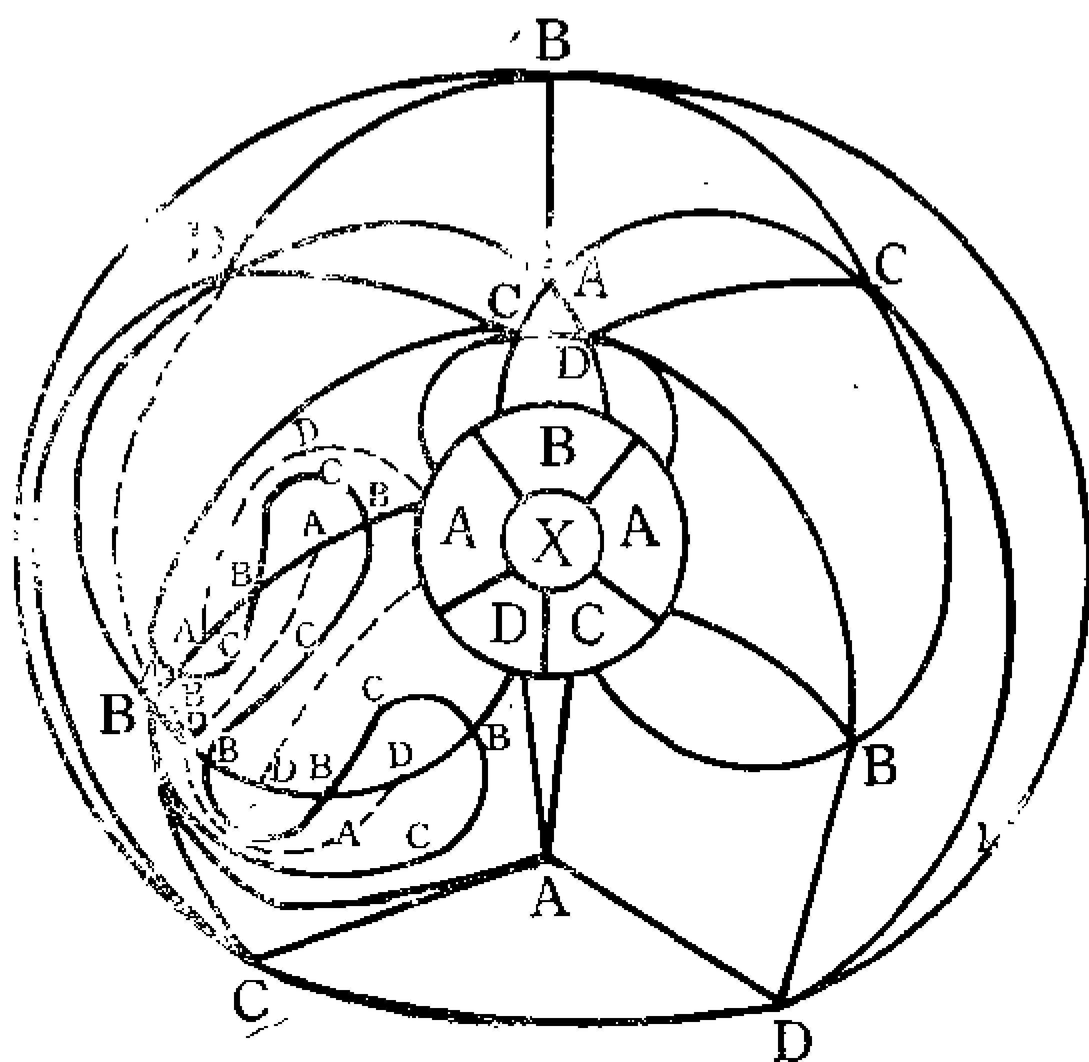


图 125

演绎至第二十步，得下图（图126）：

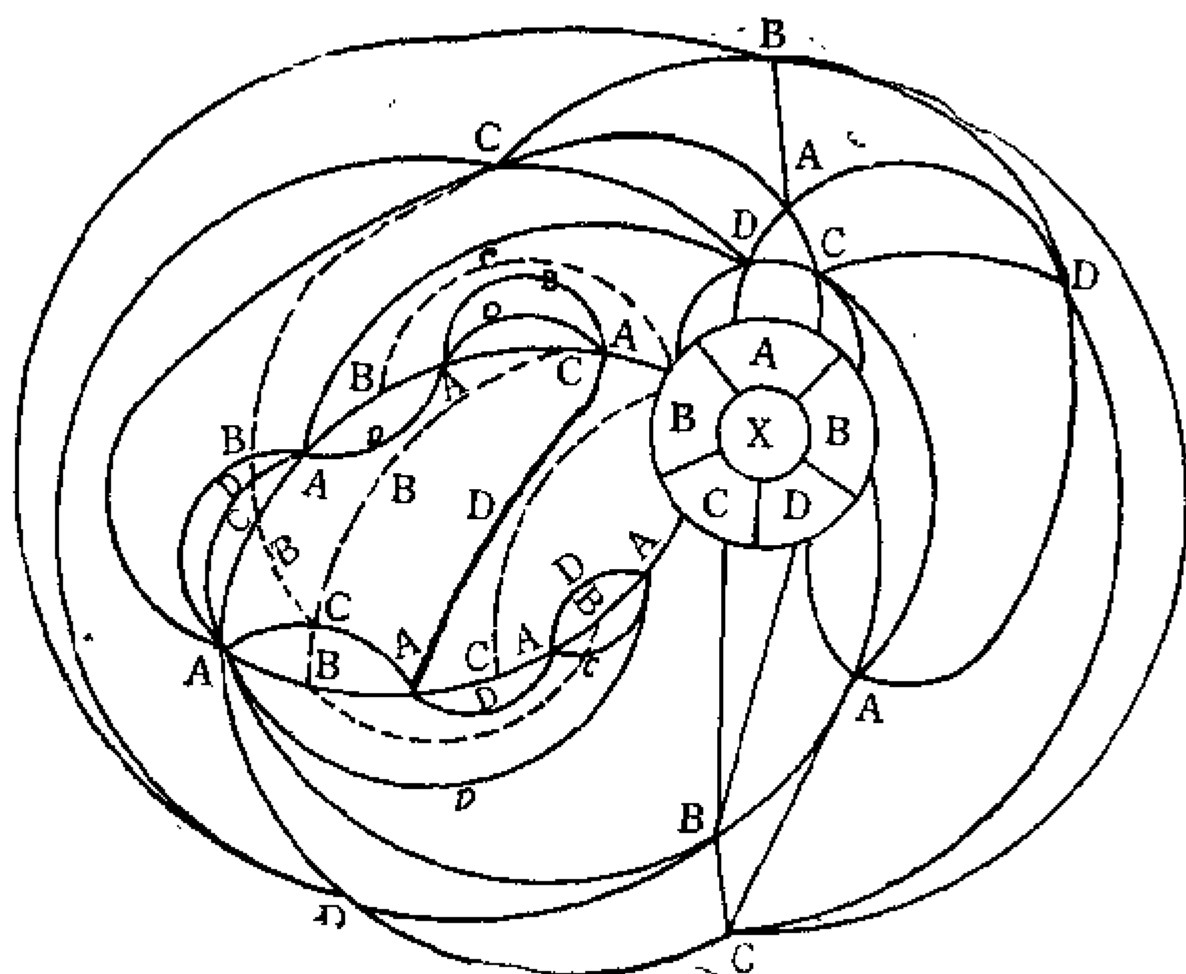


图 126

下面继续进行第二轮演绎。第十一步B—C不走第一轮中的原路盘肠迂回，而按二阶图N走已形成的桥线直接连B（v_5）。这就叫做割“盘肠肿块”，使原有的一堆线路成为废道。下图（图127）为第二轮演绎的第十一步图。

下图（图127）割“盘肠肿块”后（注意不要损害其中的基本线路），继续演绎至第二十步得下图（图128）。略去多余桥线后，即呈现非交叉粘连二阶图N。

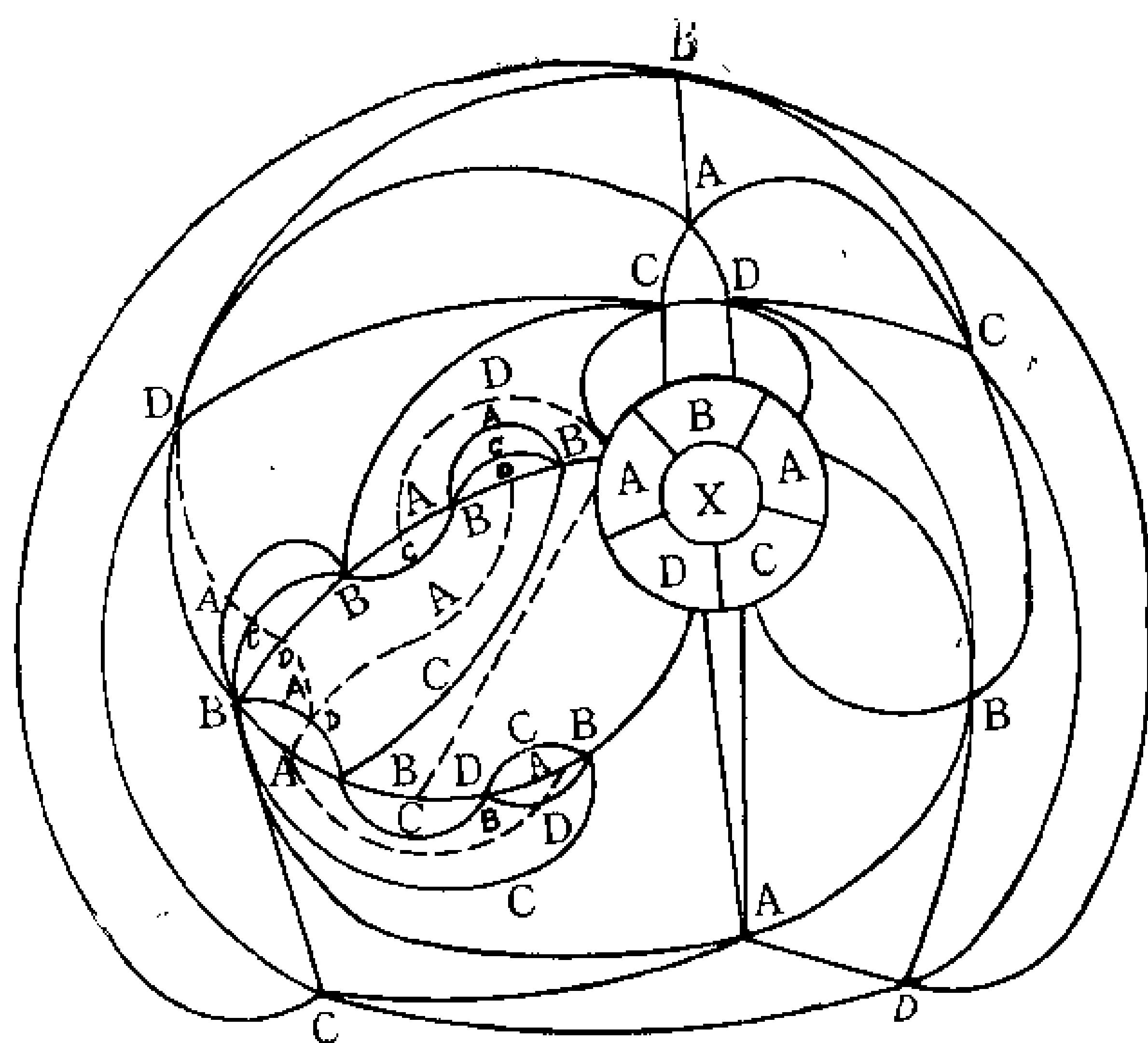

B
A
C
D
C
D
D
B
A
A
X
A
D
C
B
B
A
B
B
C
C
B
A
B
D
A
C
B
D
C
A
C
D

图 127

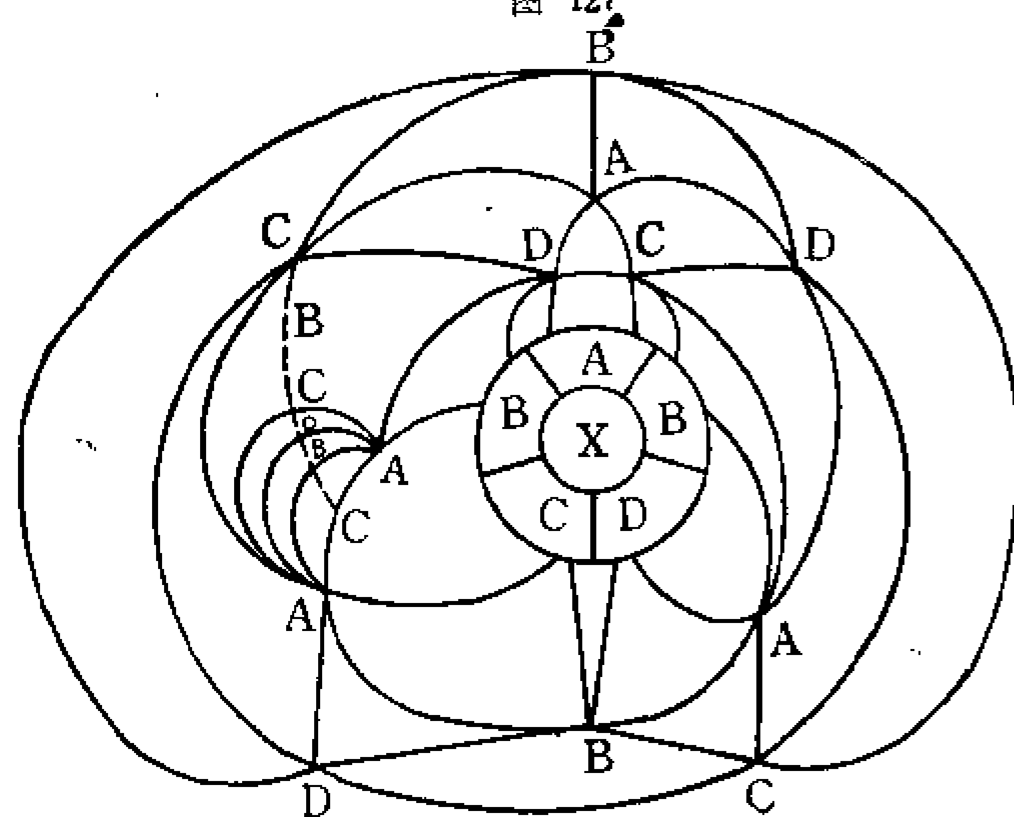

B
A
C
D
C
D
B
A
C
B
X
B
C
C
A
C
D
A
A
B
D
C

图 128

14．相邻两条二色线段的交叉粘连和 l线范围内的成桥定理

综11、12、13所述，可知在二阶四色演绎中，凡非相邻二色线段交叉粘连，或l线穿过多条二色线路与非目标结点交会，甚至径直与同色的二色线路连通，或者象盘肠一样在有共同色素的二色通道间穿来穿去然后才连接成二色圈，都不过是二阶四色演绎中的一些在实质上无关紧要的惊险插曲，是没有任何实际意义的，演绎的结果都只能是被相邻的二色线段交叉粘连所取代，或直接变为非交叉粘连。因为一条二色线路l穿过相邻二色线段同非相邻二色线段交叉粘连，在可控换色后必使被穿过的二色线路中断，其后的演绎必在这些二色线路的断处连接成桥，最后必使原穿过相邻二色线段的l线经过相邻二色线段上的桥与直接目标结点连接（包括基本结点转移后的目标结点）。也就是说，一条二色线段同非相邻二色线段的交叉粘连或线路连接，最后必演变为同相邻的二色线段的非交叉粘连或在3线桥桥体中的交叉粘连。用句俗话说，这叫做“孙悟空跳不出如来佛的手心”。因此，关于二阶图N的复式图问题，我们可以把前面演绎中放开的网收回来，在下面只要聚精会神弄清楚在二阶图N中相邻两条二色线段的交叉粘连问题即可。因为这是关系到二阶图N的复式图R_1，也包括后面所说的二阶图R_2，在三阶四色演绎中证明四色可解或证明四色不可解的一个极为重要的先决条件。

在二阶图N的复式图R_1中，现在的关键问题是要弄清楚所有相邻两条二色线段交叉粘连的全部情况。由于两条相邻二色线段的交叉粘连所引起和形成的桥，是在二阶图N的20步四色演绎过程中实际形成的，因此，要全部弄清相邻两条二色线段交叉粘连所形成的桥，必须：

第一，弄清二阶图N的各线段中20步演绎所经过的状况。我们循序用1表示在二阶图N中画出的第一条○ACX二色线路，用

2表示画出的第二条○ADX二色线路（由此开始在○ADX中可控换色，进行二阶第一步四色演绎），用3至21分别表示第二步至第二十步四色演绎的线路，再循序排列把它们一一标注在二阶图N的每一条二色线段上。我们称这个图为二阶图N的路标图。全图如下（图129）：

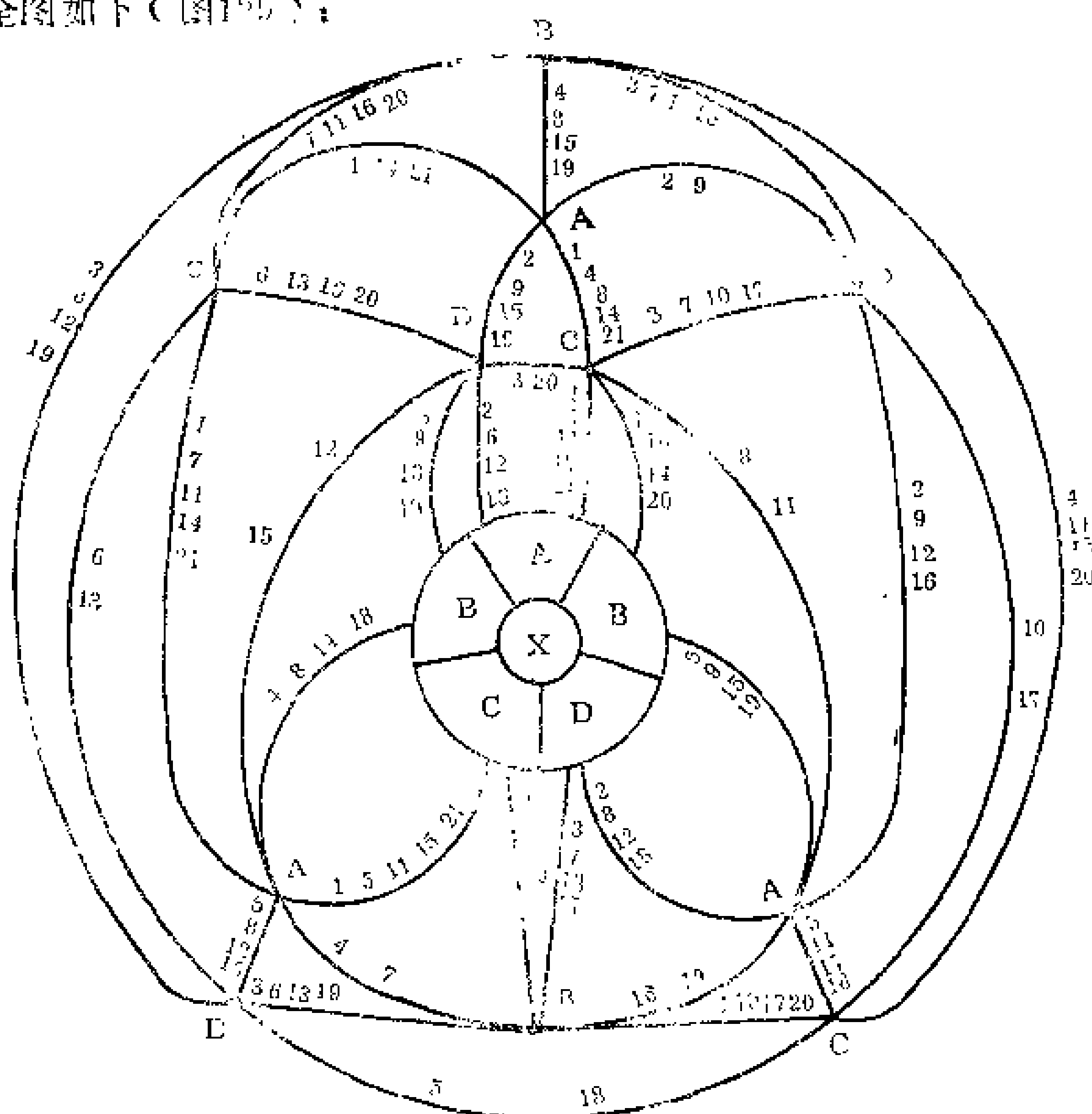


图 129

（二阶图N的路标图）

第二，以二阶图N的路标图为依据，对相邻的两条二色线段上所作的标注，循序进行次数统计和排列，找出它们的对应比。即：以两线中有最小数字的线段为m线（最初的被交叉粘连线），另一条线段为l线，从小数到大数（四色演绎中二色通道

经过各线段的先后）分别按次数列出m线与l线的对应比。例如m线的标注为2，8，12，18，l线上的标注为5，9，15，19，则m线与l线的对应比记11111111（即m线与l线均交替为1）；m线上的标注为1，7，11，14，21，l线上的标注为6，13，则m线与l线的对应比记作11212（即m线为1，l线为1，m线为2，l线为1，m线为2）。这样，对相邻两条二色线段发生交叉粘连成桥，在一轮演绎结束时就可以准确知道l线与m线交替过桥的情况以及形成的桥体的性质和桥线数。下面，我们按二阶图N的路标图和上述规定的办法，对所有相邻的二色线段的m线与l线的对应比进行一次全面普查：

①交叉“并蒂线”的对应比：

A（V_1）交叉“并蒂线”：12222

B（V_2）交叉“并蒂线”：12221

D（V_3）交叉“并蒂线”：12221

C（V_4）交叉“并蒂线”：22221

B（V_5）交叉“并蒂线”：12221

②L_1与L_1交叉粘连（不含“并蒂线”），其对应比：

A（V_1）—C（v_2）与B（V_2）—C（v_2）：11111111

B（V_2）—A（v_3）与D（V_3）—A（v_3）：1111111

D（V_3）—B（v_4）与C（V_4）—B（v_4）：1111111

C（V_4）—A（v_5）与B（V_5）—A（v_5）：11111111

B（V_5）—D（v_1）与A（V_1）—D（v_1）：1111111

③L_1与I线交叉粘连，其对应比：

A（V_1）—D（v_1）与D（v_1）—C（v_2）：1131

A（V_1）—C（v_2）与D（v_1）—C（v_2）：11311

B（V_2）—C（v_2）与C（v_2）—A（v_3）：11112

B（V_2）—A（v_3）与C（v_2）—A（v_3）：11112

D（V_3）—A（v_3）与A（v_5）—B（v_4）：3111

D（V_3）—B（v_4）与A（v_5）—B（v_4）：3111

C(V_4)—B(v_4)与B(v_4)—A(v_5): 1113
C(V_4)—A(v_5)与B(v_4)—A(v_6): 11113
B(V_6)—A(v_6)与A(v_6)—D(v_1): 21111
B(V_5)—D(v_1)与A(v_6)—D(v_1): 21111
④I线与 L_2 交叉粘连，其对应比：
D(v_1)—C(v_2)与D(v_1)—A(u_1): 1131
D(v_1)—C(v_2)与C(v_2)—A(u_1): 11311
C(v_2)—A(v_3)与C(v_2)—D(u_2): 21111
C(v_2)—A(v_3)与A(v_3)—D(u_2): 11112
A(v_3)—B(v_4)与A(v_3)—C(u_3): 3111
A(v_3)—B(v_4)与B(v_4)—C(u_3): 21111
B(v_4)—A(v_5)与B(v_4)—D(u_4): 11112
B(v_4)—A(v_5)与A(v_5)—D(u_4): 1113
A(v_6)—D(v_1)与A(v_6)—C(u_5): 31111
A(v_6)—D(v_1)与D(v_1)—C(u_5): 11112
⑤ L_1 与 L_2 交叉粘连，其对应比：
D(v_1)—A(u_1)与C(v_2)—A(u_1): 1121121
C(v_2)—A(u_1)与C(v_2)—D(u_2): 111111111
C(v_2)—D(u_2)与A(v_3)—D(u_2): 121121
A(v_3)—D(u_2)与A(v_3)—C(u_3): 11111111
A(v_3)—C(u_3)与B(v_4)—C(u_3): 1112111
B(v_4)—C(u_3)与B(v_4)—D(u_4): 11111111
B(v_4)—D(u_4)与A(v_5)—D(u_4): 1112111
A(v_5)—D(u_4)与A(v_5)—C(u_5): 111111111
A(v_6)—C(u_5)与D(v_1)—C(u_5): 1121121
D(v_1)—C(u_5)与D(v_1)—A(u_1): 11111111
⑥ L_2 与Ⅱ线交叉粘连，其对应比：
C(v_2)—A(u_1)与A(u_1)—D(u_2): 11212
C(v_2)—D(u_2)与A(u_1)—D(u_2): 1212

A (v_3) —D (u_2) 与D (u_2) —C (u_3) : 2121

A (v_3) —C (u_3) 与D (u_2) —C (u_3) : 11211

B (v_4) —C (u_3) 与C (u_3) —D (u_4) : 11211

B (v_4) —D (u_4) 与C (u_3) —D (u_4) : 11211

A (v_5) —D (u_4) 与D (u_4) —C (u_5) : 11211

A (v_5) —C (u_5) 与D (u_4) —C (u_5) : 11212

D (v_1) —C (u_5) 与C (u_5) —A (u_1) : 12121

D (v_1) —A (u_1) 与C (u_5) —A (u_1) : 12121

⑦Ⅱ线与L_3交叉粘连，其应对比：

A (u_1) —D (u_2) 与A (u_1) —B (T) : 1212

A (u_1) —D (u_2) 与D (u_2) —B (T) : 1212

D (u_2) —C (u_3) 与D (u_2) —B (T) : 2121

D (u_2) —C (u_3) 与C (u_3) —B (T) : 11211

C (u_3) —D (u_4) 与C (u_3) —B (T) : 11211

C (u_3) —D (u_4) 与D (u_4) —B (T) : 11211

D (u_4) —C (u_5) 与D (u_4) —B (T) : 11211

D (u_4) —C (u_5) 与C (u_5) —B (T) : 1212

C (u_5) —A (u_1) 与C (u_5) —B (T) : 12121

C (u_5) —A (u_1) 与A (u_1) —B (T) : 12121

⑧L_3与L_3交叉粘连，其对应比：

A (u_1) —B (T) 与D (u_2) —B (T) : 11111111

D (u_2) —B (T) 与C (u_3) —B (T) : 11111111

C (u_3) —B (T) 与D (u_4) —B (T) : 11111111

D (u_4) —B (T) 与C (u_5) —B (T) : 11111111

C (u_5) —B (T) 与A (u_1) —B (T) : 11111111

在这里需要补充说明的是：（a）在进行二阶图N的第一步演绎时，已在此前形成了○ACX，因此在考察二色线段的交叉时必须将○ACX的二色线路列为1线，至第二十步演绎时○ACX又列为21线。倘要进行新的第二轮四色演绎时，21线与1线为同

线，在m线与l线的对应比中应将l线略去。例如12121，在第二轮演绎中一开始应略去m线的1而连接l线的2。又如31111，在第二轮演绎中一开始应将m线的3改为2。识别这种情况的简易方法，是这些数字之和为奇数。（b）上述A（V_1）—D（v_1）与A（V_1）—C（v_2）的交叉粘连，D（v_1）—A(u_1)与C（v_2）—A（u_1）的交叉粘连在二阶图N的复式图R_1中是不存在的。在这里一并列入，便于统一考察一阶图P在二阶演绎中的状况。以上所列的全部相邻二色线段交叉粘连的对应比，包括了二阶图R_1和R_2的所有相邻二色线段交叉粘连的对应比。

第三，按m线与l线的对应比进行成桥和过桥演绎（m线与l线的两端均与X区相连），求出二阶图N各相邻线段交叉粘连的性质和桥线数。其情况和结果，同在二阶四色演绎图C中进行的完全相同，而演绎的工程量缩小多了。现根据上面找出的各相邻m线与l线的对应比，按先后顺序分别列出其成桥的性质和桥线数（凡相同的对应比，居后者不重列。图中仍命A—C为l线，B—C为m线，支撑隐线和演绎过程均省略）：

△12222：2线桥（图130）

△12221：2线桥（1桥线断）。（图131）

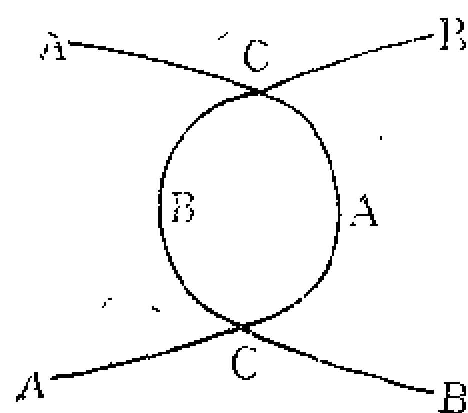


图 130

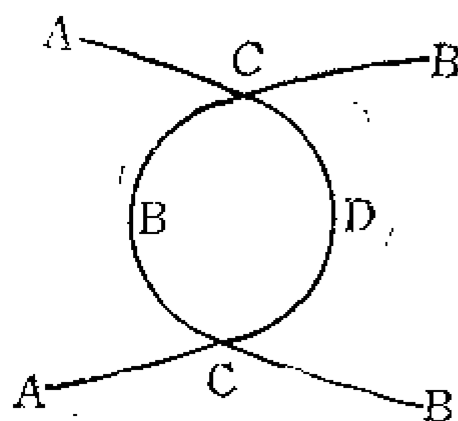


图 131

△22221：2线桥（同12221，1桥线断）。

△11111111：4线桥（含4线桥以上，下同）。

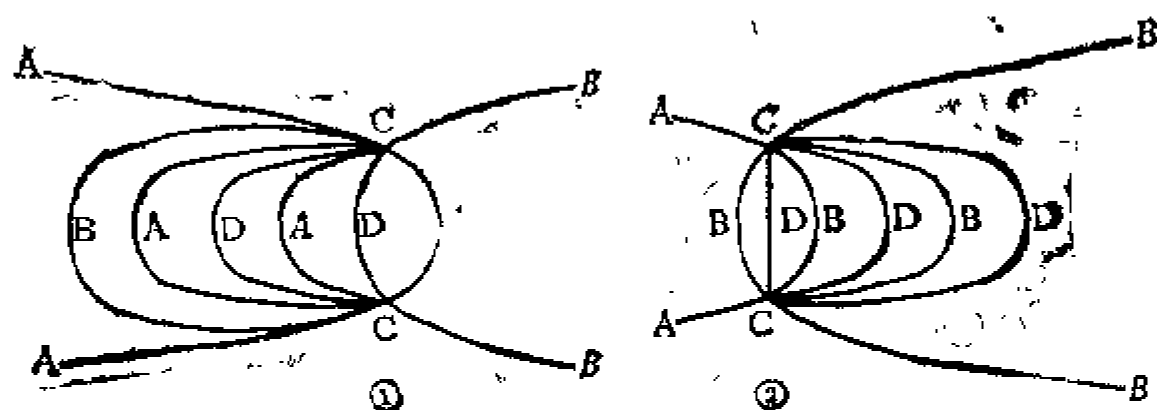


图 132

△1111111：4线桥。

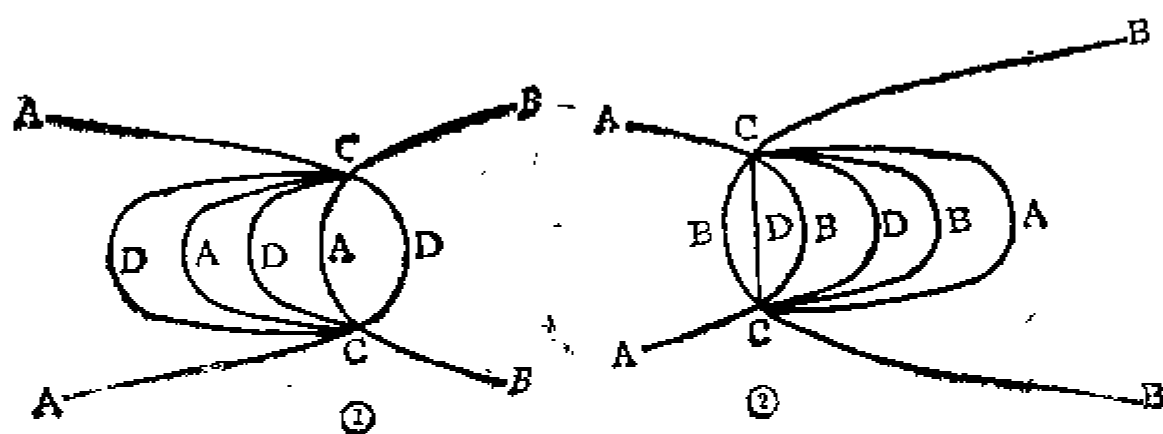


图 133

△1131：2色3线桥（m桥线断）或4线桥。

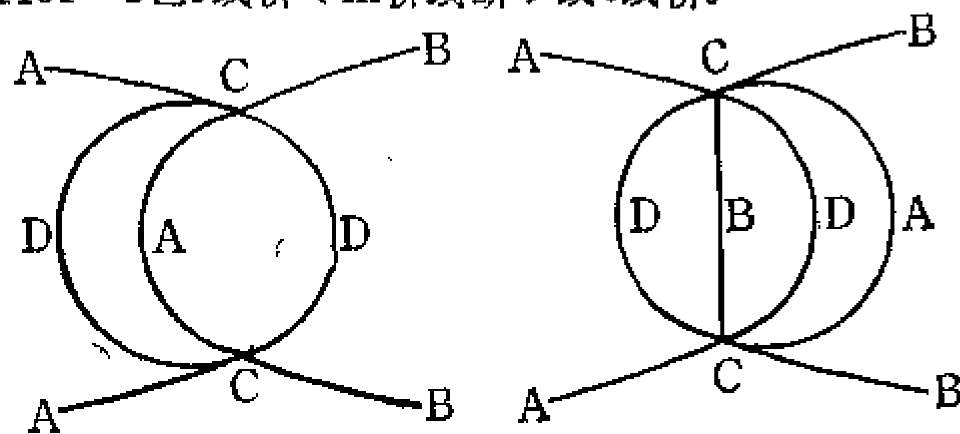
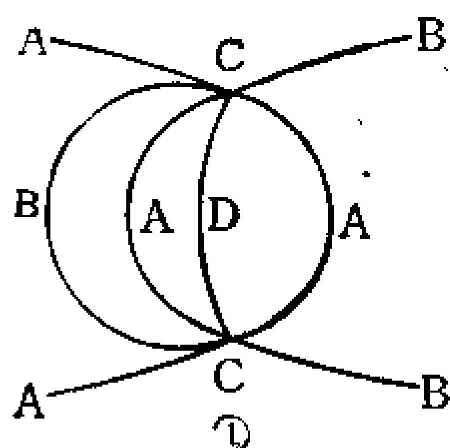


图 134

上图①，因m桥线断，为演绎过程未完结，再按1131进行新一轮演绎，变为4线桥。

△11311：4线桥。



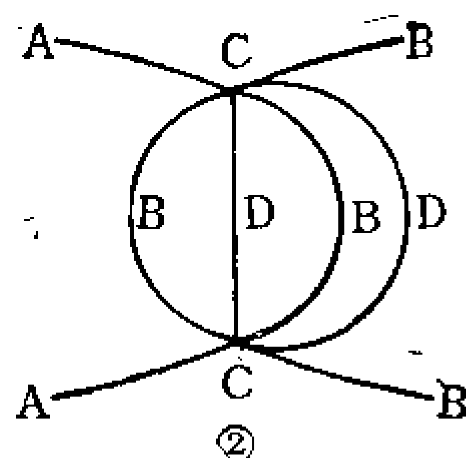
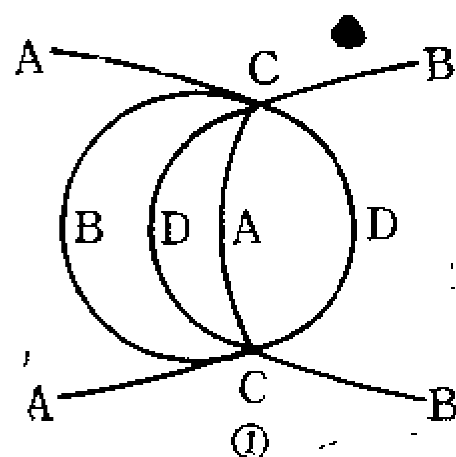


图 135

△11112：4线桥。



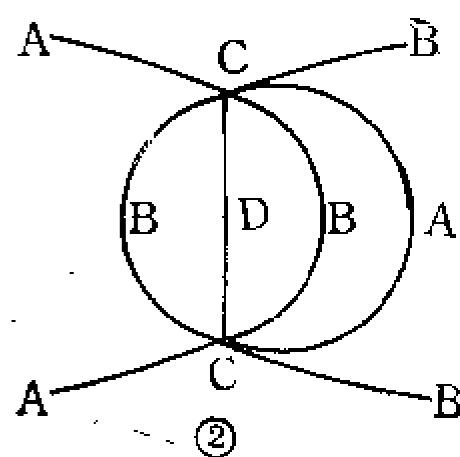


图 136

△3111：2色3线桥（m桥线断）或1线桥。

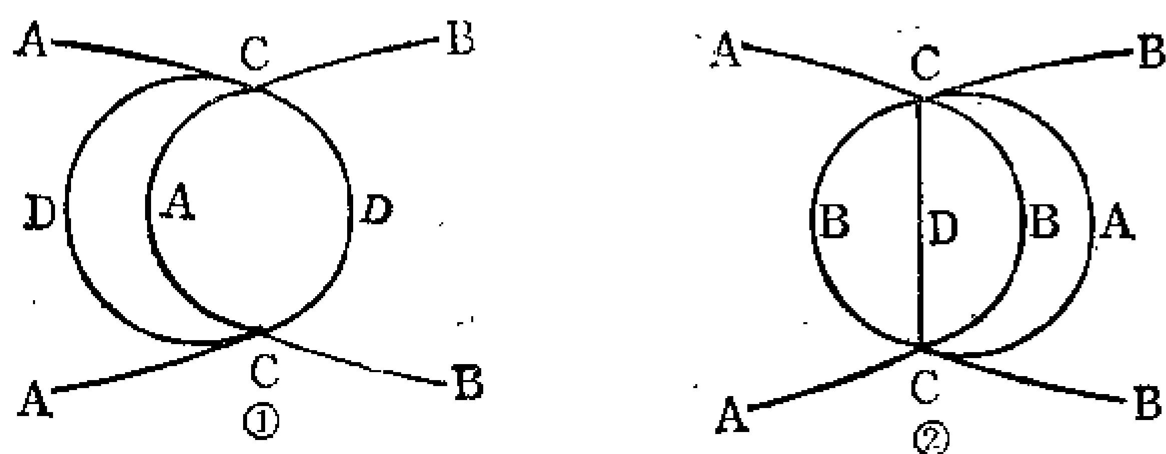


图 137

上图①，因m桥线断，为演绎过程未完结，再按3111进行新一轮演绎，变为4线桥。

△1113：2色3线桥（m桥线断）或4线桥。

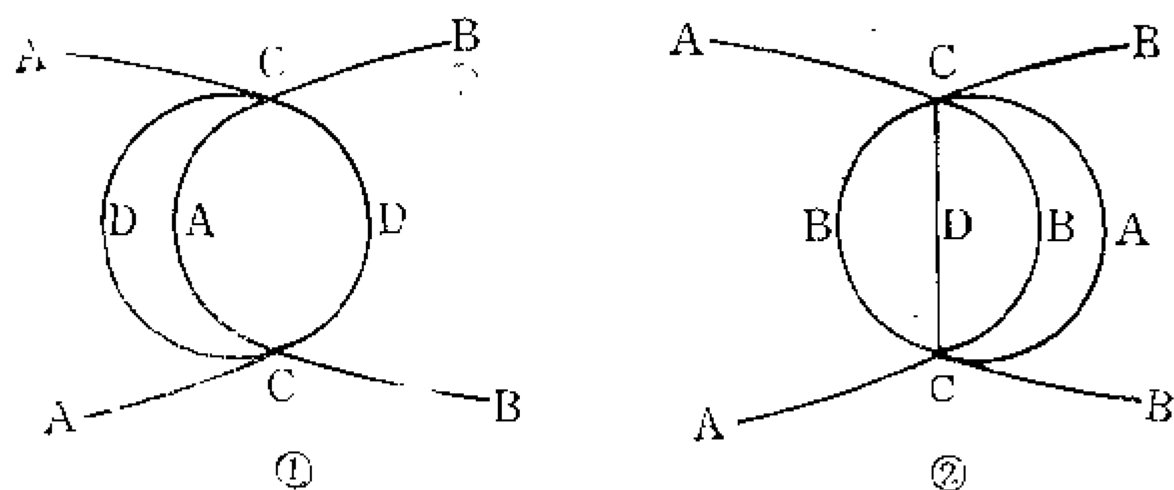


图 138

上图①，因m桥线断，为演绎过程未完结，再按1113进行新一轮演绎，变成4线桥。

△11113，21111，31111，均为4线桥。

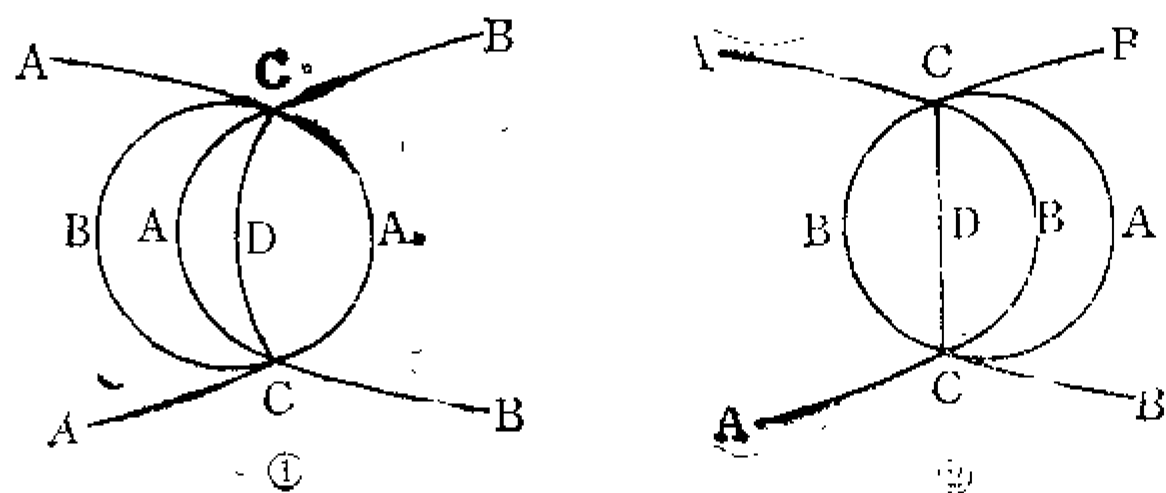


图 139

△1121121：4线桥或3色3线桥。

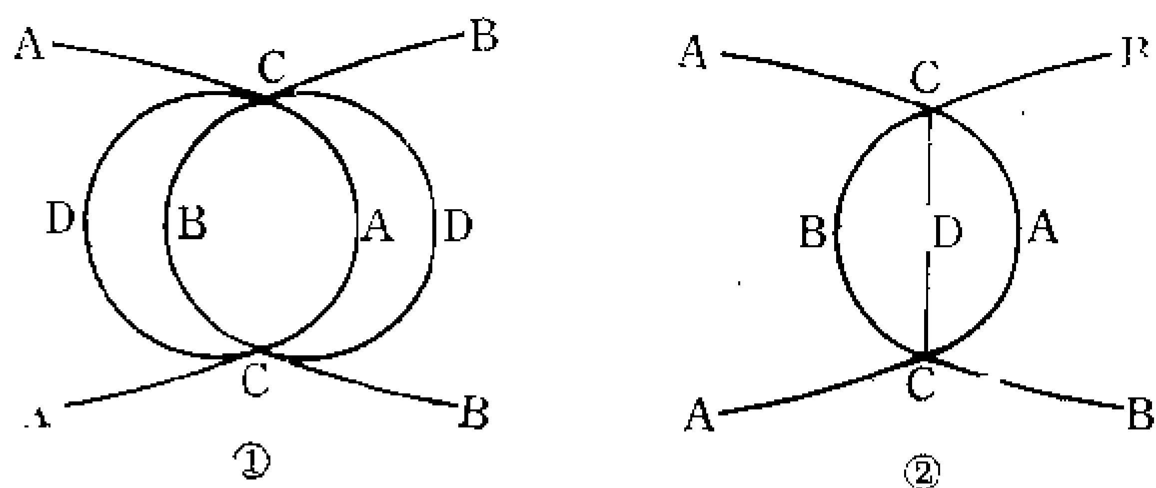
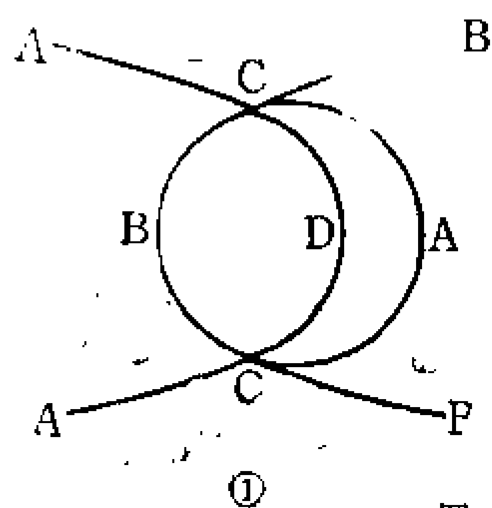


图 140

△121121：3色3线桥或4线桥。



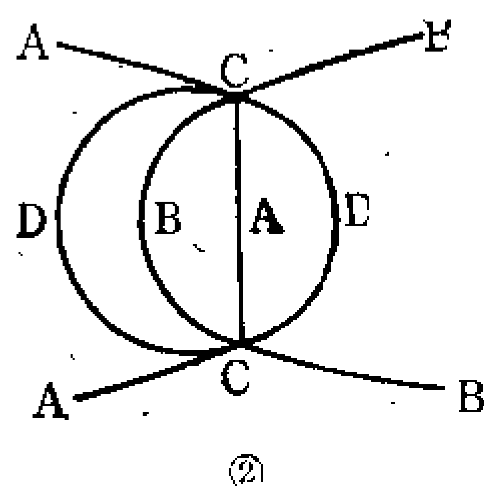
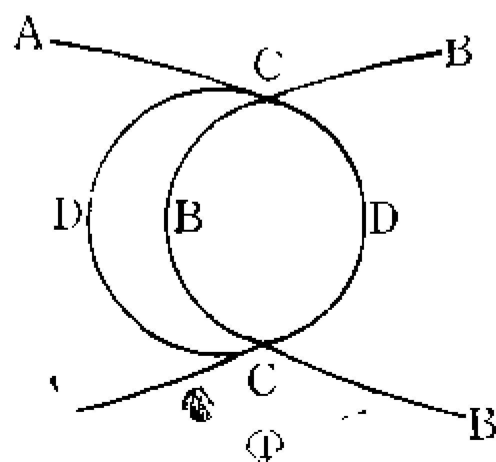


图 141

△1112111：2色3线桥或4线桥。



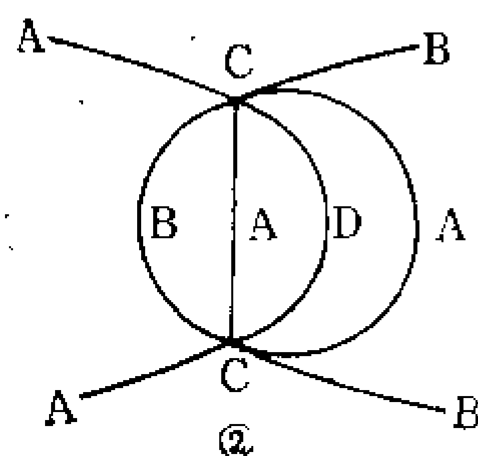
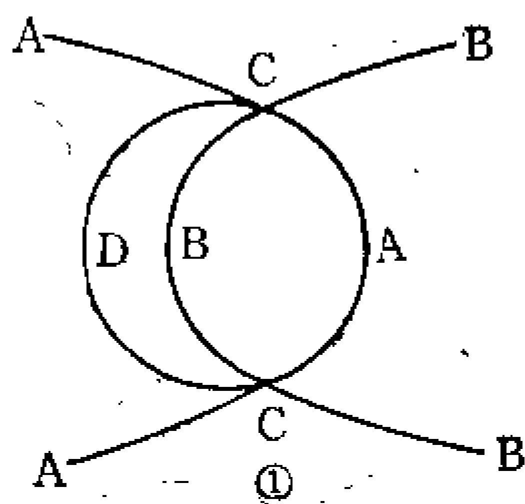


图 142

△11212：3色3线桥。



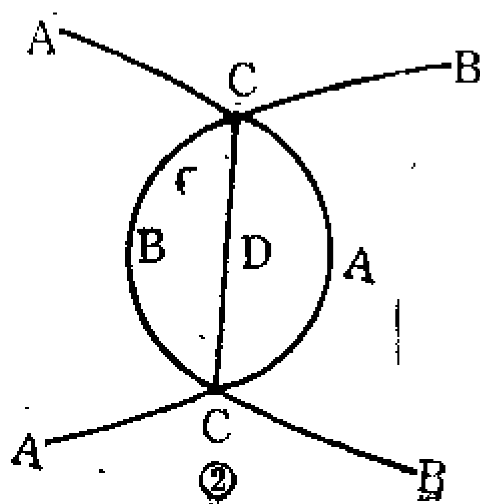


图 143

△1212：3色3线桥。

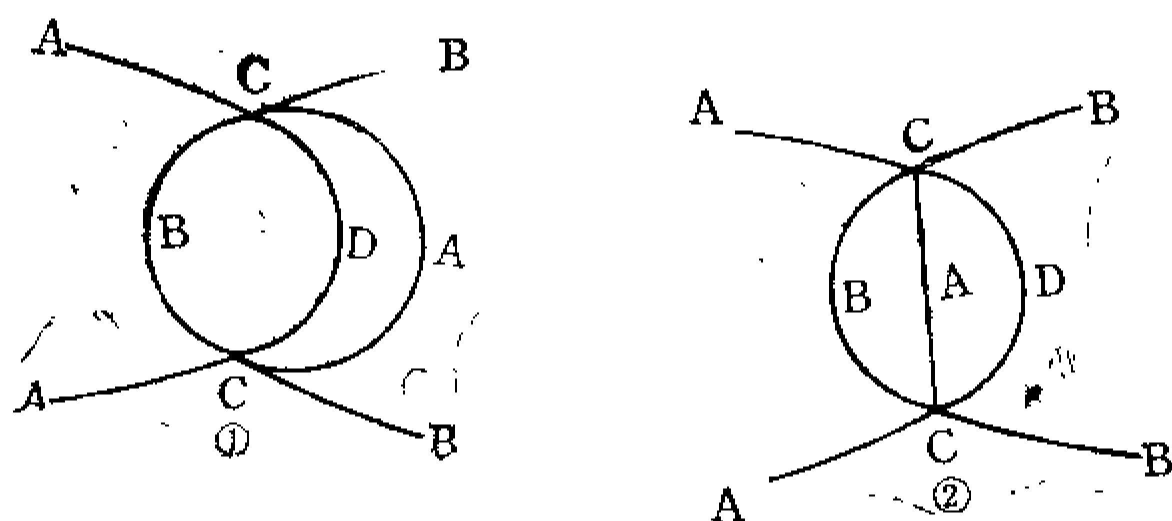


图 144

△2121：3色3线桥。

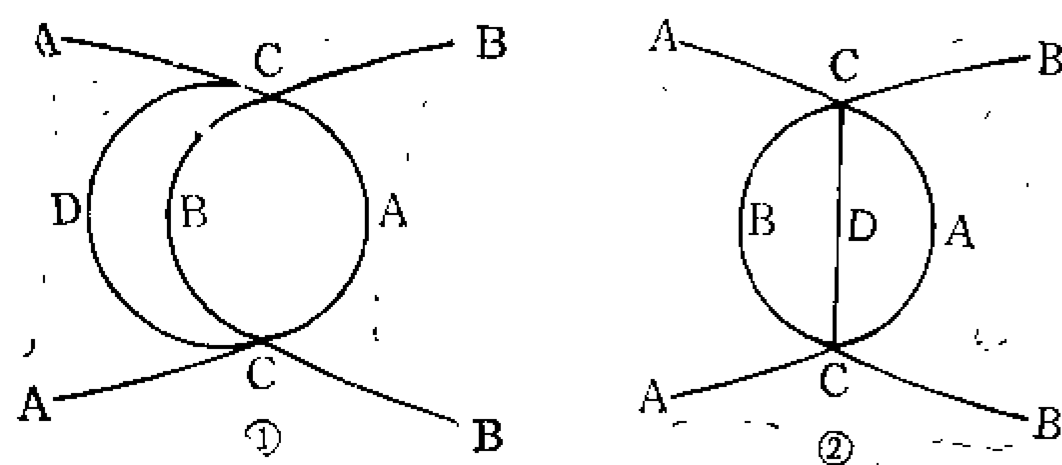
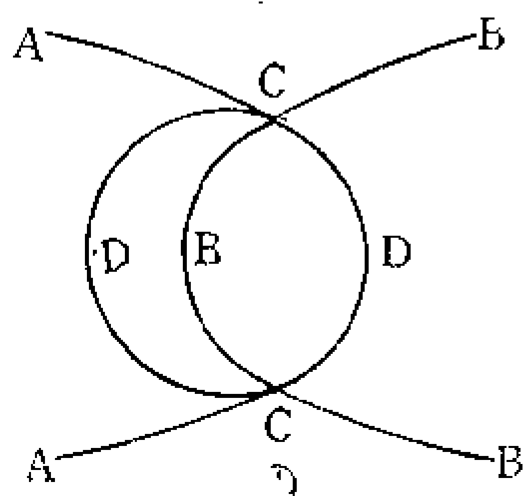


图 145

△11211：2色3线桥或3色3线桥。



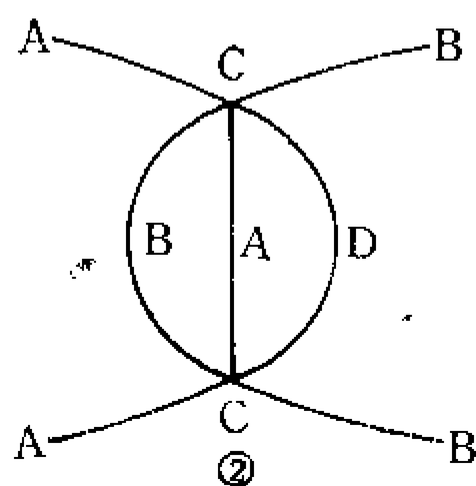
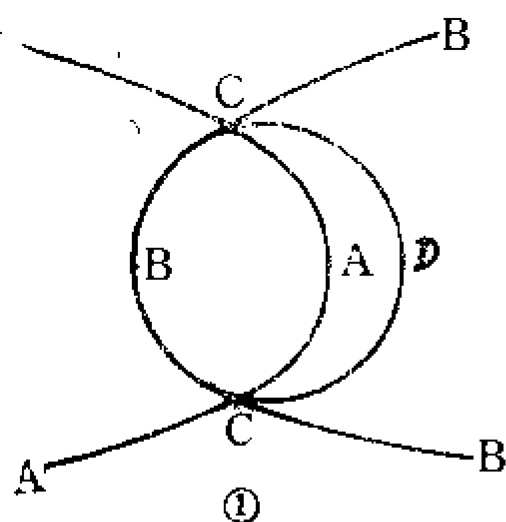


图 146

△12121，3色3线桥。



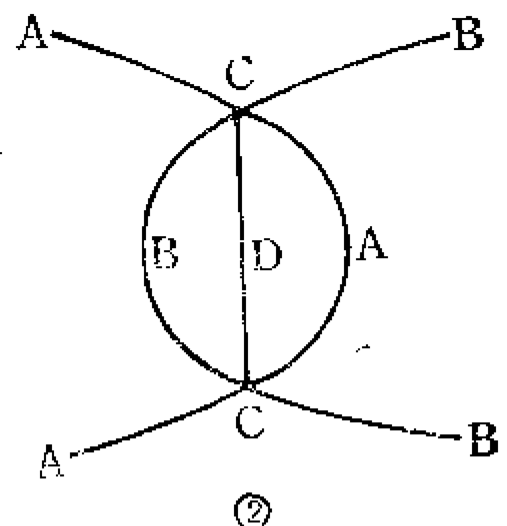


图 147

（注：在上述图132—147中，图①皆指m线B—C不能从原2线桥体中间穿过，图②皆指m线B—C从原2线桥体中间穿过）

第四，由上，在二阶图N的复式图R_1中（也包括图R_2），对相邻二色线段的交叉粘连，可以得出以下结论：

（a）交叉“并蒂线”均为2线桥。

（b）L_1与L_1交叉粘连，均为4线桥。

（c）L_1与I线交叉粘连，为4线桥或2色3线桥。经第二轮演绎均为4线桥。

（d）I线与L_2交叉粘连，为4线桥或2色3线桥。经第二轮演绎均为4线桥。

（e）L_2与L_2交叉粘连，为4线桥或3色3线桥、2色3线桥。

（f）L_2与Ⅱ线交叉粘连，均为3色3线桥或2色3线桥。

（g）Ⅱ线与L_3交叉粘连，均为3色3线桥或2色3线桥。

（h）L_3与L_3交叉粘连均为4线桥。

至此，可以得出二阶图N的复式图R_1在I线（包括I线自身）范围内成桥定理：经第二轮演绎，除连接X邻区的“并蒂线”为2线桥外，均为4线桥，而4线桥均可变交叉粘连为非交叉粘连，使桥消失。此定理同样适用于二阶图R_2和二阶图R_1R_2。

15．二阶图N的复式图R_1的5种类型及其代表型的概略图

综前所述，在二阶图N的复式图的演绎过程中，非相邻二色线段的交叉粘连均可转化为相邻二色线段的交叉粘连，而在相邻二色线段的交叉粘连中，4线桥均可经桥体自身的可控换色变为非交叉粘连，故所有二阶图N的复式图，经桥体自身的可控换色和略去演绎过程中遗留的多余线路后，可分为以下几类：

第一类：非交叉粘连二阶图N。（其中有些可以在演绎过程中自我形成，不需经过桥体的可控换色）

第二类：非交叉粘连+3线桥（包括3色3线桥、2色3线桥和交叉粘连3线桥）的二阶图N的复式图。

第三类：非交叉粘连+3线桥（包括3色3线桥、2色3线桥和交叉粘连3线桥）+“并蒂线”（含有一条隐线的3线桥）的二阶

图N的复式图。

第四类：非交叉粘连＋“并蒂线”（含有一条隐线的3线桥）的二阶图N的复式图。

第五类：仅有“并蒂线”（含有一条隐线的3线桥）的二阶图N的复式图。

除第一类以外的四种类型，均为二阶图R_1，其中第三类包括了所有二阶图N的复式图，因而是二阶图N的复式图的代表，或者说是二阶图R_1的代表。下面是作为这种代表的二阶图R_1的概略图（图148）：

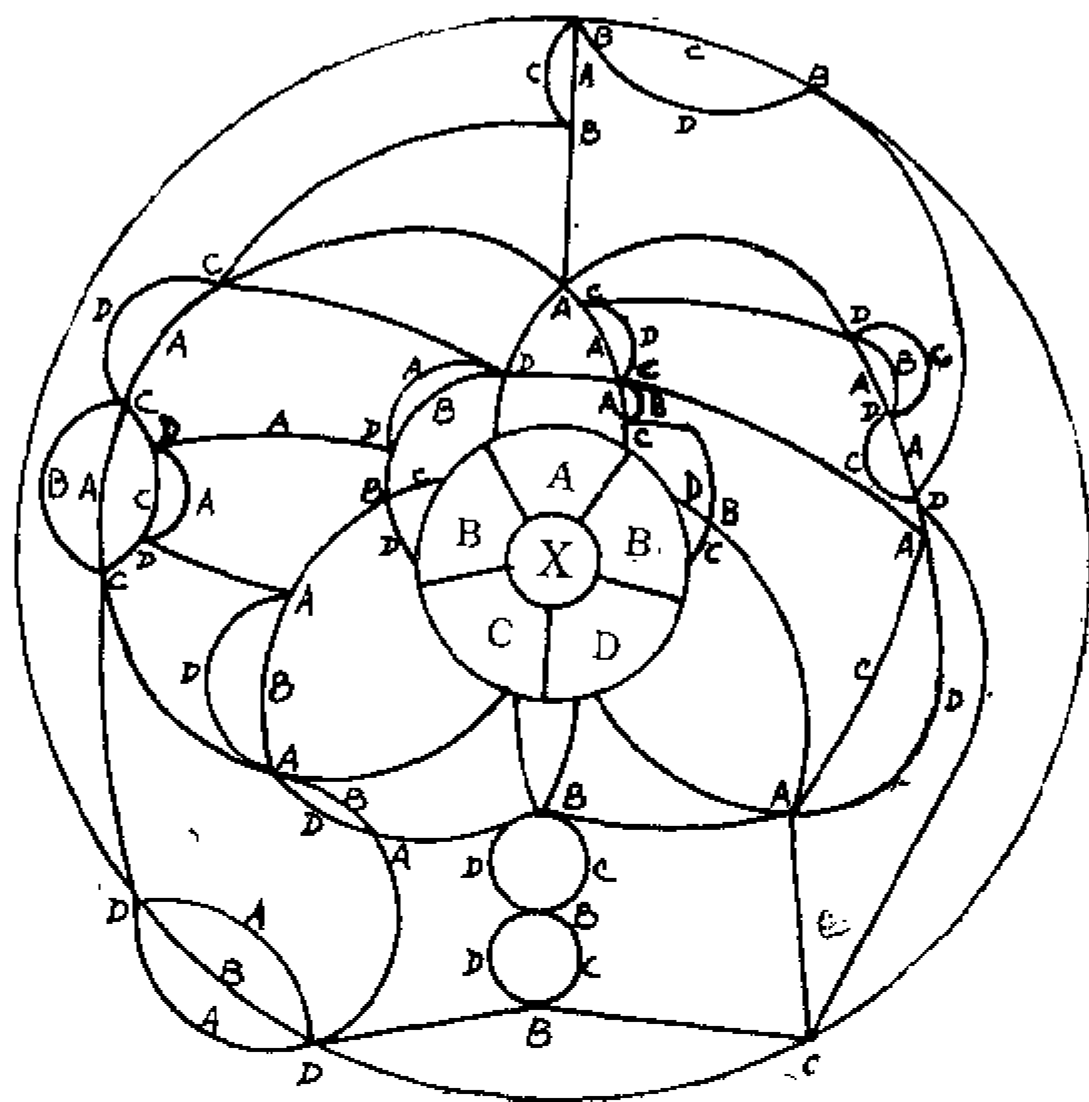


图 148

（二阶图R_1的概略图）

在上图中，凡二阶演绎中曾走过但后来成为废道者（在新一轮的演绎中不需要再经过这些线路），以及4线桥经桥体可控换色变为非交叉粘连后的多余线路，均已略去。

（五）一阶四色不可解的非基准线路图在二阶中的四色演绎

1.一阶图M′的二阶四色演绎——一阶图M的二阶等价图

演绎至此，我们不要遗忘了补一个插题，即关于一阶图M′的二阶四色演绎。漏掉了它，对整个证明来说，就等于留下了一个“定时炸弹”。仍按二阶四圈20步连锁可控换色演绎，其原始图（参阅第21页图16）而二阶演绎的结果为（图149）：

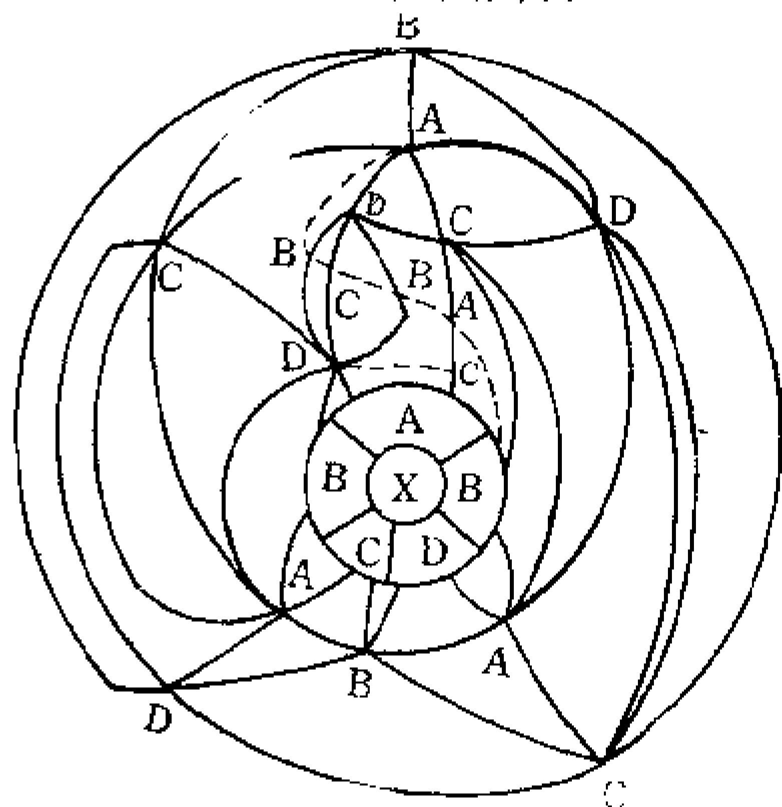


图 149

至此，演绎过程并未完结。在二阶四色演绎中，这是一个不完全图。因为○ADX的二色线路（m线）断了，也尚未形成○BCX四色可解圈。或者连接A—D形成○ADX与○ACX的交叉“并带图”，或者连接B—C形成○BCX四色可解圈，

二者必择其一。因为我们是要排除二阶四色可解和求二阶四色不可解线路集合，因此应当连接A—D继续进行新一轮的20步演绎，其结果为图150（我们不在图149的色线束○DB中C换A，因为演绎的结果仍恢复原状，所以在色线束○DB的两外侧分别连接A—D）：

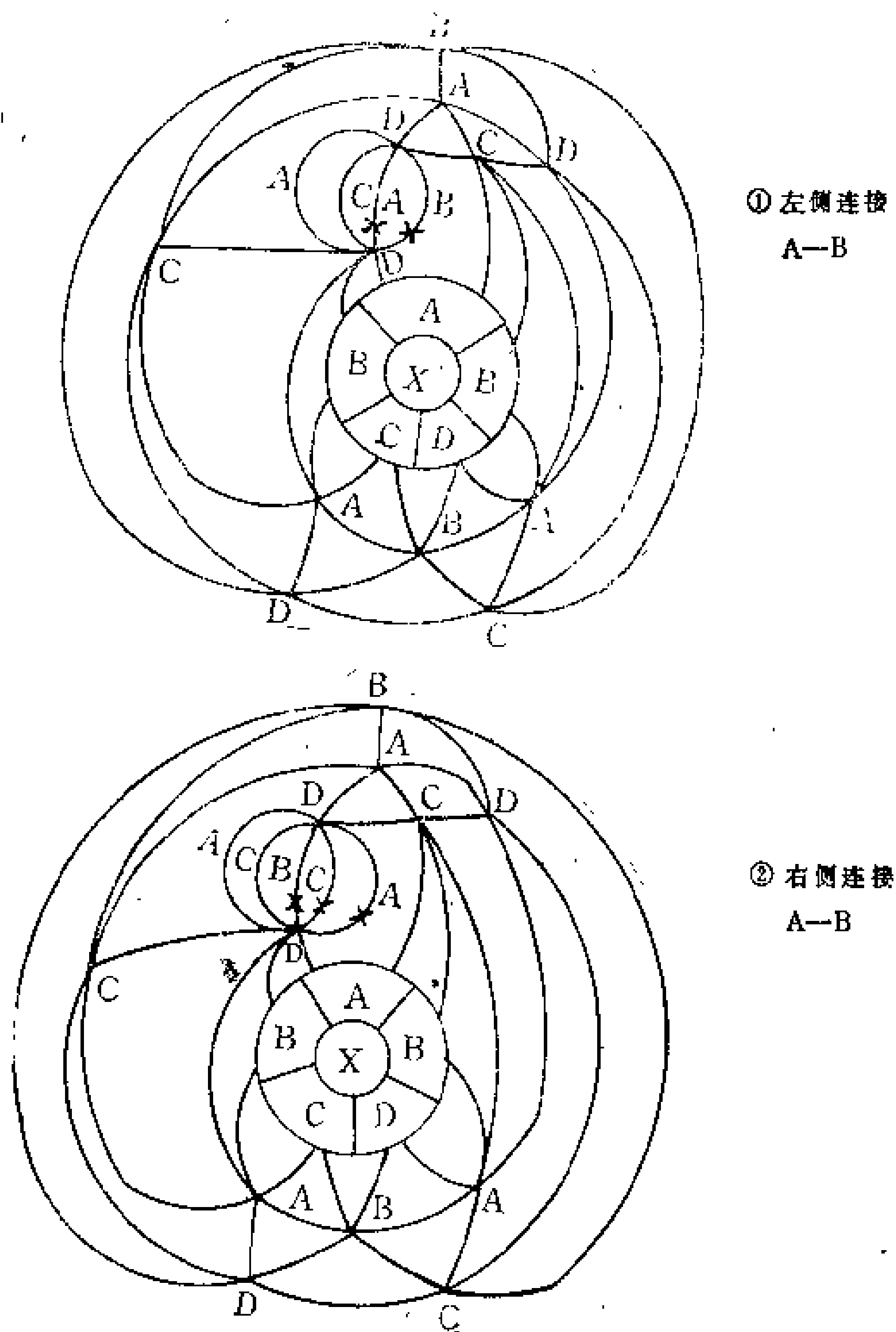


图 150

在上两图的桥体中分别略去多余线路，均为非交叉粘连二阶图N（略去用“×”表示）。尽管在一阶图M′中，A……B隐线同时穿过○ADX与○ACX的具体形态会有各种不同，但均受C……D制约，而且一阶图M′在二阶四色演绎中，与一阶图M对照，原被A……B隔断的C……D线路必定要连通，并切断原A……B隐线，从而在原来的被隔断处形成“桥”。如不能，则20步演绎中断，为二阶四色可解。经略去多余线路（或经桥体自身的可控换色后再略去多余线路，即为非交叉粘连二阶图N。因此，一阶图M′与一阶图M为等价。

当然，在图149中，由于○BD是一个外侧为同一色线的3线桥，中间桥线具有活塞效应，兼具D—A与D—C两重性质（可以互换），以此直接解释图149证明了一阶图M′与一阶图M等价，也是可以的。

2．一阶图P的二阶四色演绎——二阶图R：

在一阶中，○ACX与○ADX多次相交（从“并蒂区”A出发，每一次顺交叉称为一级，顺序由内到外称为1级、2级……n级），其二阶四色不可解线路集合，除一阶的交叉部分外，均与二阶四色不可解线路集合基准图N及其复式图相同，演绎过程与四圈可控换色的20步相同。其u_1结点为○ADX与○ACX交叉“并蒂圈”的最后正向交点A。在○ACX与○ADX的n次交叉中，如有两级或两级以上的非交叉线段（此处所说的非交叉线段乃对照一阶图M来确定，即在左侧的A—D线段和在右侧的A—C线段为非交叉线段），当第二步形成○DBX时，令D—B从允许通过的最低一级的非交叉线段穿过，并由此确定v_1与v_2两个基本结点，然后按此格局继续进行演绎，至第二十步，则其二阶四色不可解线路集合为（图151）：

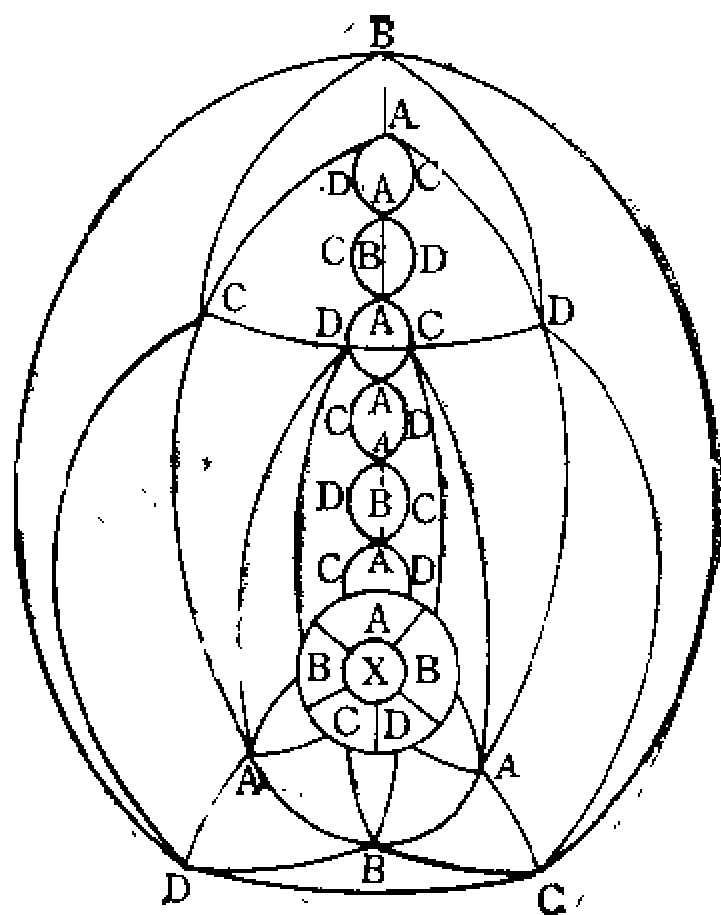


图 151

如果○ACX与○ADX有n次相交，A—C与A—D线路同在图形一侧者，如上图分别移为两侧；在图形下侧相交者移至上侧；一部分在图形上侧相交和一部分在图形下侧相交者，将在下侧相交者移至上侧，因均为拓扑同构，在前面我们已经约定采用模式N。

在一阶中，A—C与A—D的交叉粘连有以下几种：

①A—C与A—D的顺向交叉型粘连（n级交叉粘连），如图152。

经演绎，其二阶四色不可解线路集合分别为图153。

②A—C与A—D逆向交叉型粘连（一级交叉粘连）。如图154。

经演绎，其二阶四色不可解线路集合为图155。

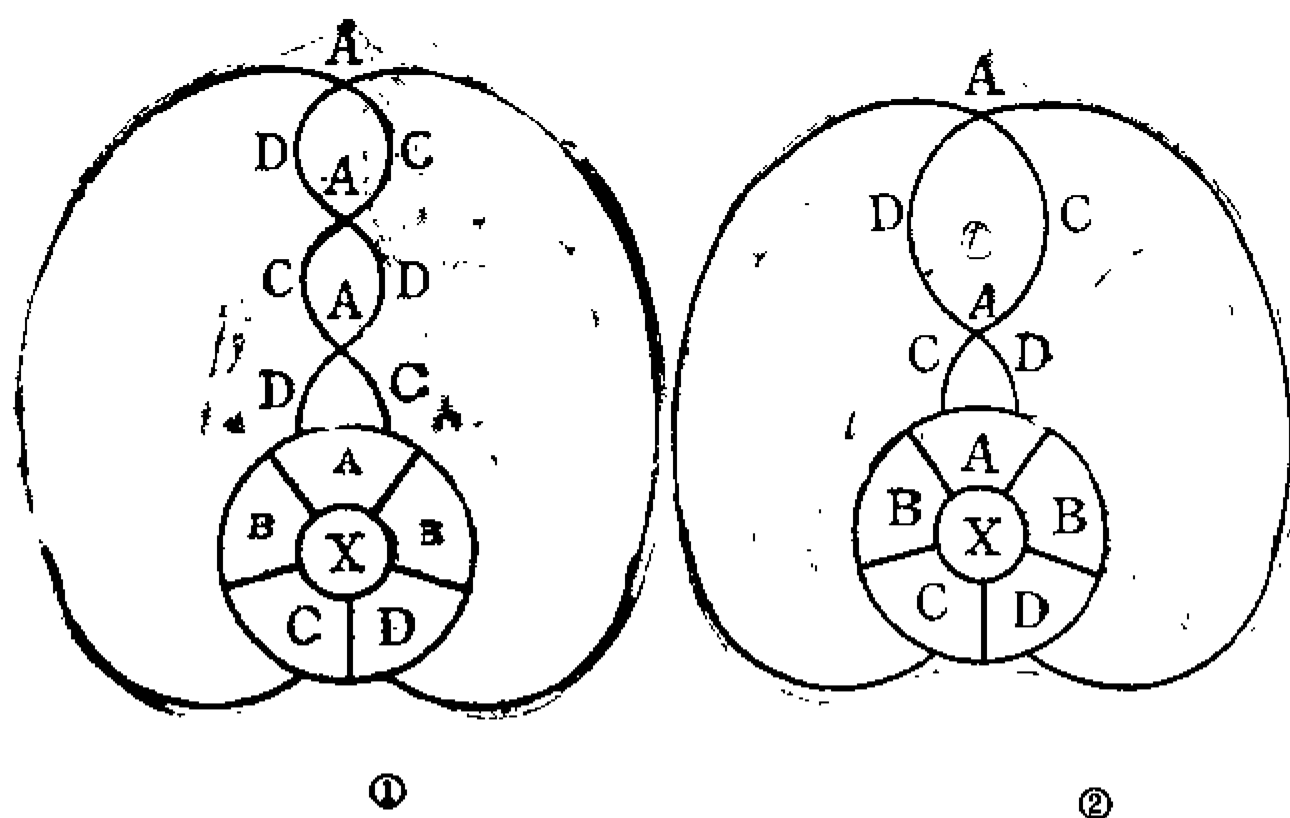
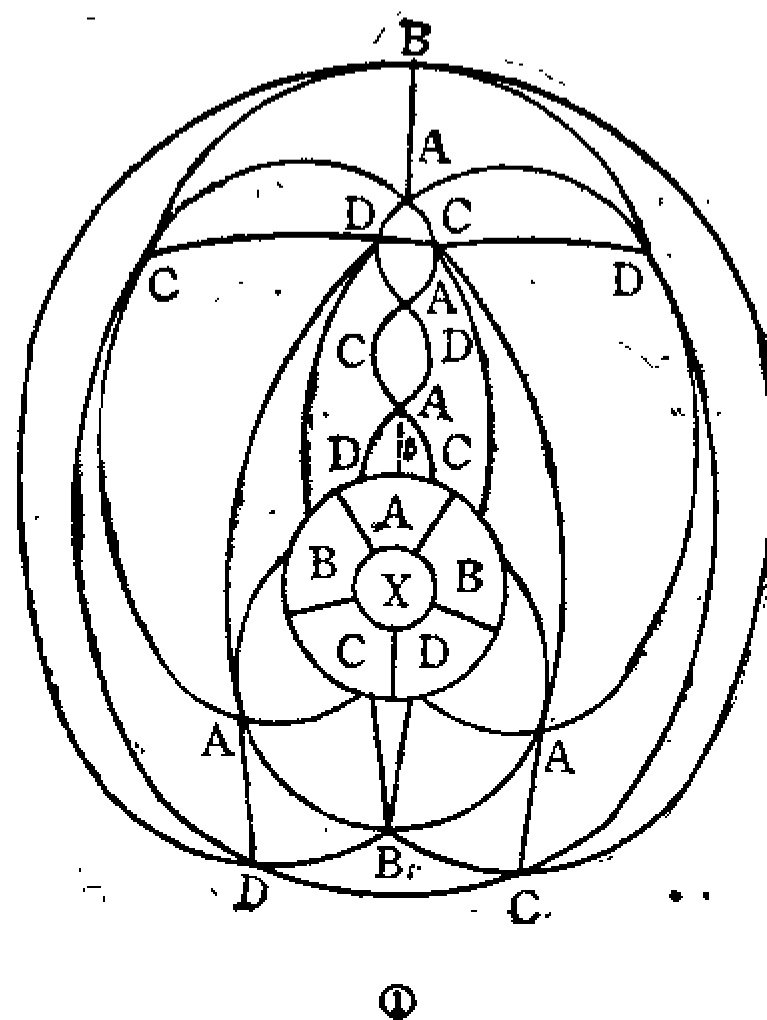

A
D
C
A
C
A
D
D
C
A
B
X
B
C
D
①
A
D
C
A
C
D
A
B
X
B
C
D
②

圖 152


B
A
D
C
C
D
A
C
D
A
D
C
A
B
X
B
C
D
A
A
B
D
C
①

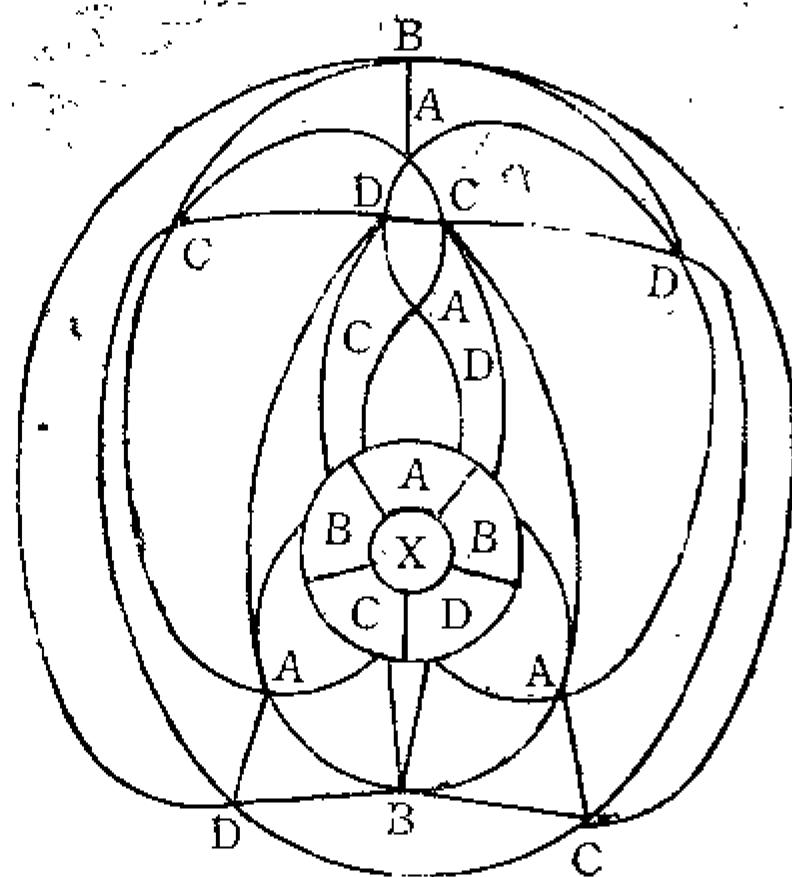


图 153

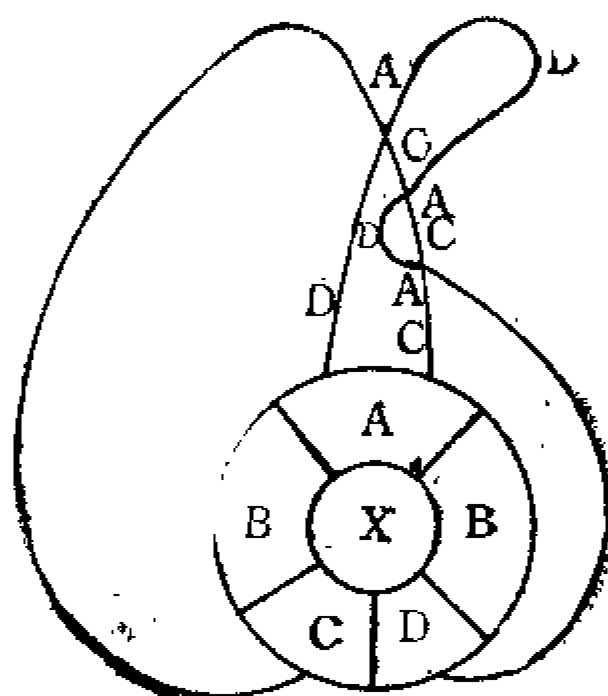


图 154

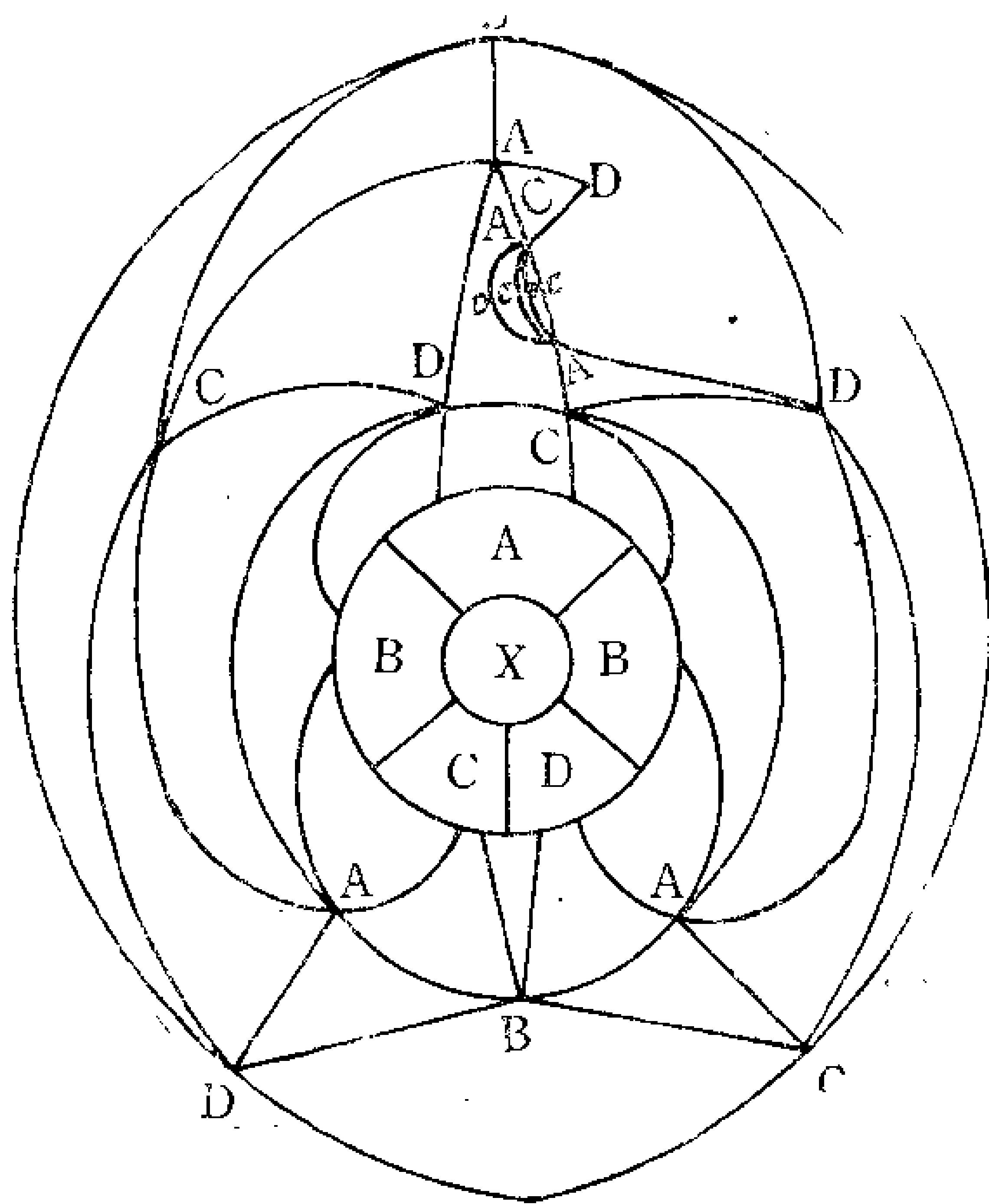


图 155

③A—C与A—D顺向与逆向混合交叉型粘连。如：

(a) 先逆后顺（图156）

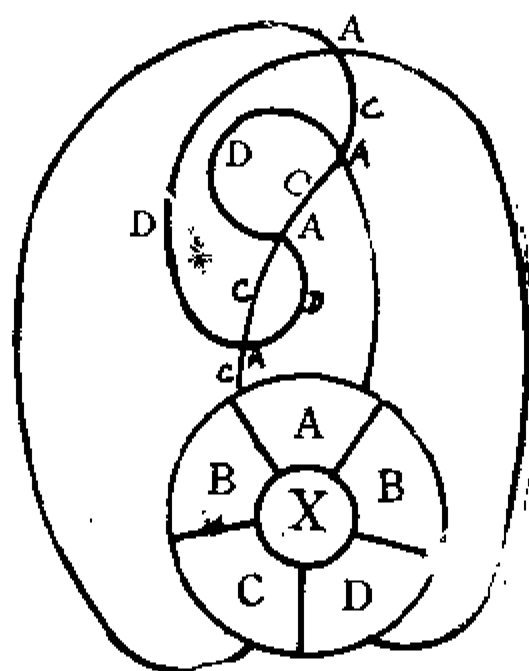


图 156

经演绎，其二阶四色不可解线路集合为（图157），

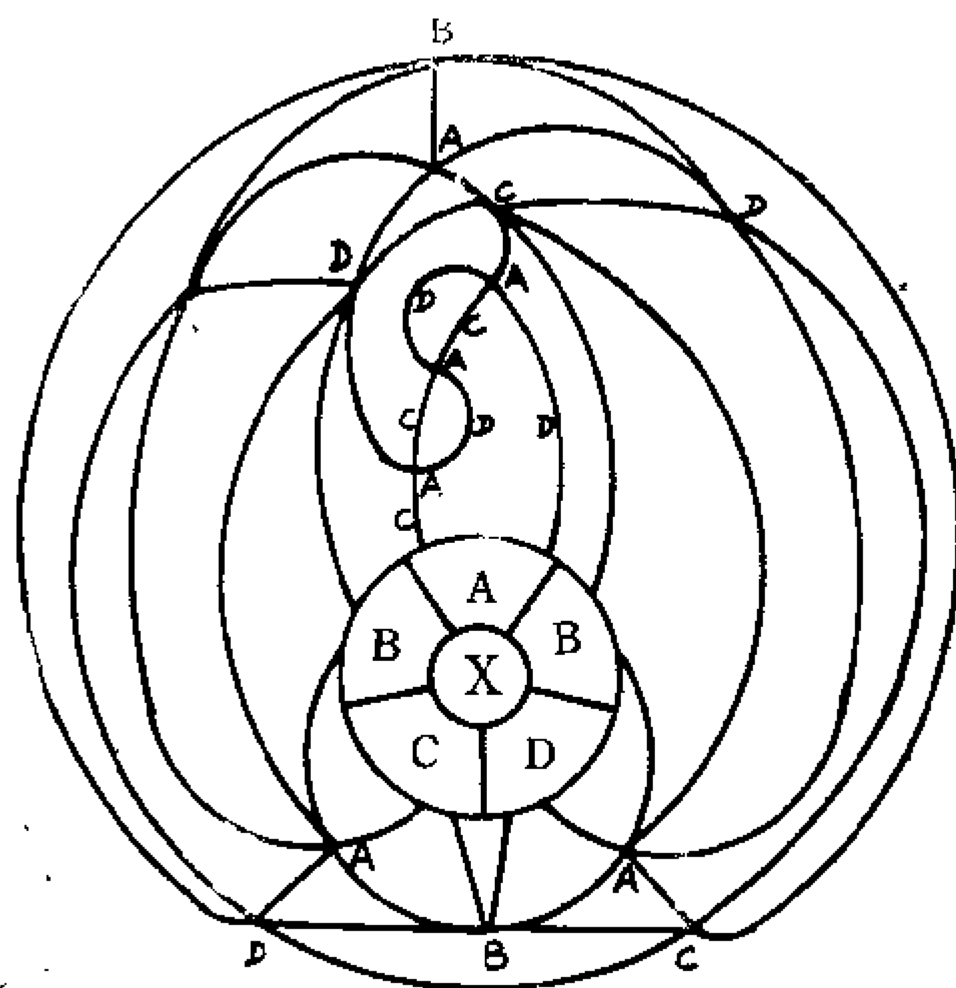


图 157

（b）先顺后逆（图158），

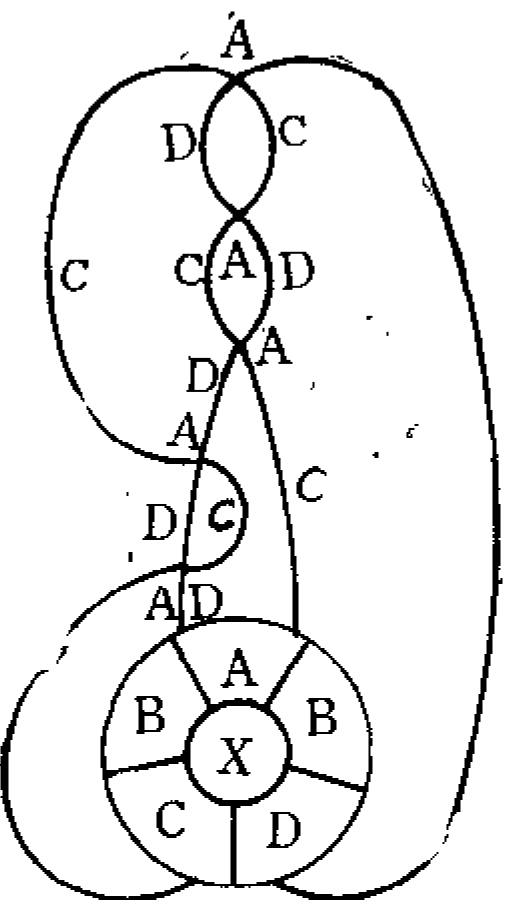


图 158

经演绎，其二阶四色不可解线路集合为（图159），

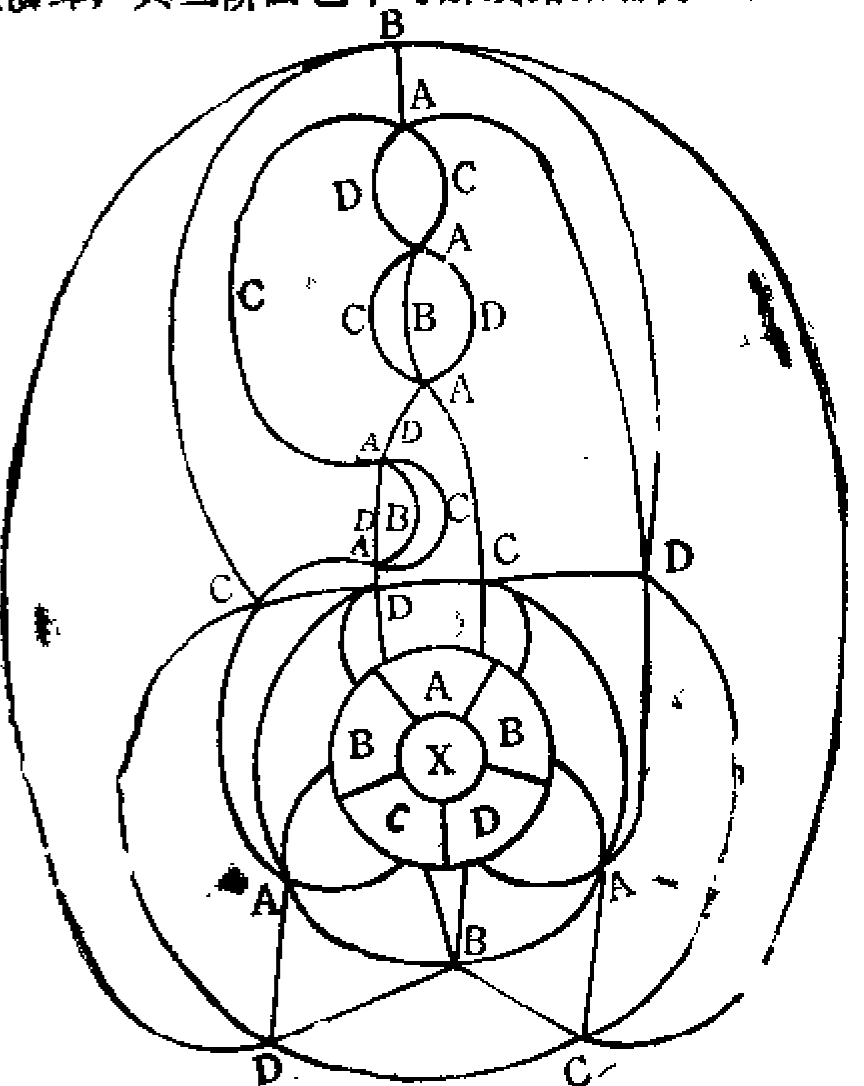


图 159

（c）互逆（一级交叉，见图160）

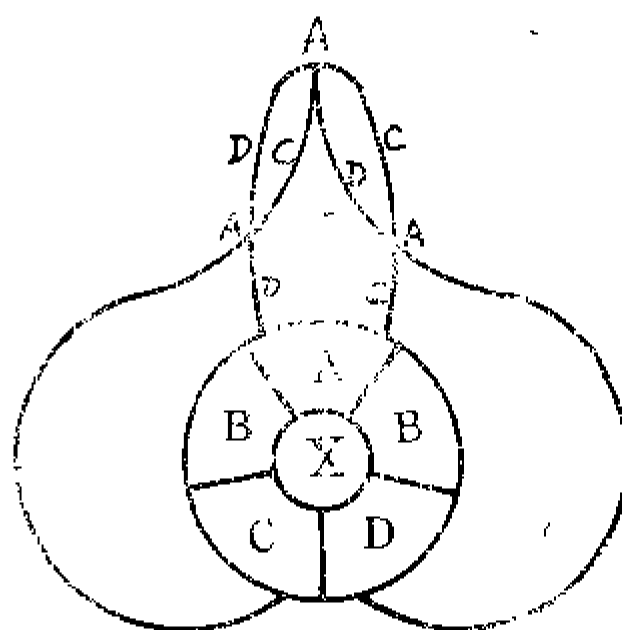


图 160

经演绎，其二阶四色不可解线路集合为（图161）：

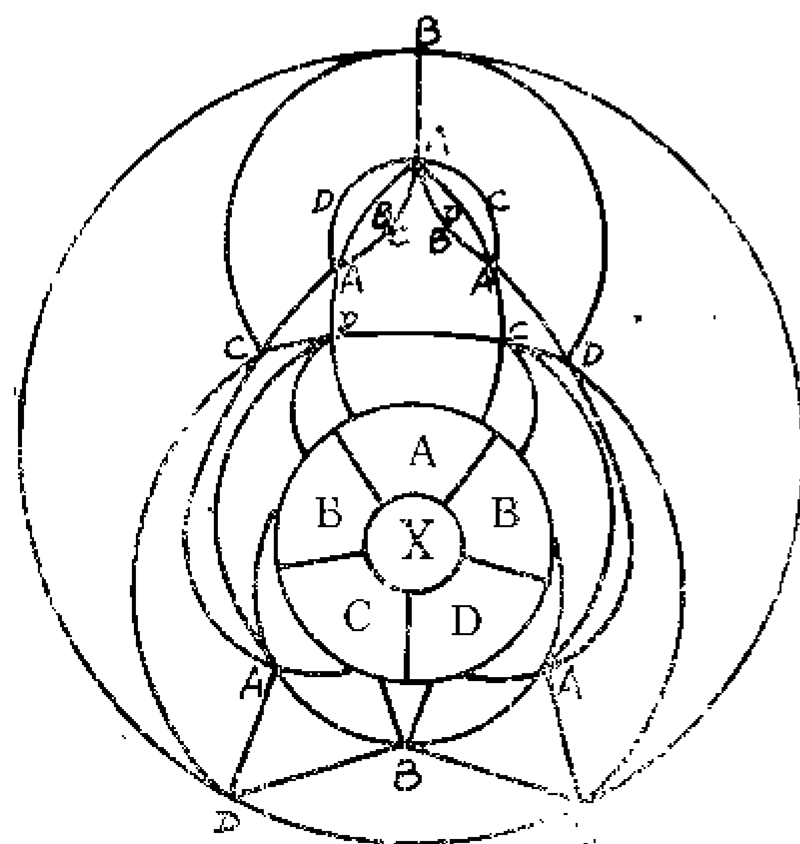


图 161

（注：上面图150至图161均未标明支撑隐线）

3．一阶图P′的二阶四色演绎

——一阶图P的二阶等价图

在一阶中，当○ADX与○ACX交叉"并蒂圈"多次交叉时，在这两个二色圈内，如A（u_1）至X的邻区A、B有A……B隐线，则同○ADX与○ACX一次交叉一样，凡全部A……B隐线在哪一个二色圈内就在这个二色圈内进行可控换色，即形成四色可解图，为一阶四色可解。倘A……B隐线其中一部分只在○ADX内，一部分只在○ACX内，则为一阶四色不可解图形，其二阶四色演绎正如一阶图M′在二阶中所进行的演绎那样，为隔断原A……B隐线和保证C—D连通，在C—D被隔断处形成了"桥"（色线束），否则为二阶四色可解。我们称这类图为一阶图P的等价图。一阶图P的等价图，在二阶四色演绎中最后所形成的二阶四色不可解线路集合（包括多轮演绎和桥体自身的可控换色调整），之所以与原二色线路相同的一阶图P在二阶演绎结束时所形成的某些线路图形可能有所不同，乃由于四色演绎过程中二色线路（桥线）的增加，从而可使某些原有二色线路改道，变某些交叉粘连为非交叉粘连。下面作具体的四色演绎说明。

下图（图162）为一阶图P的等价图P′

图 162

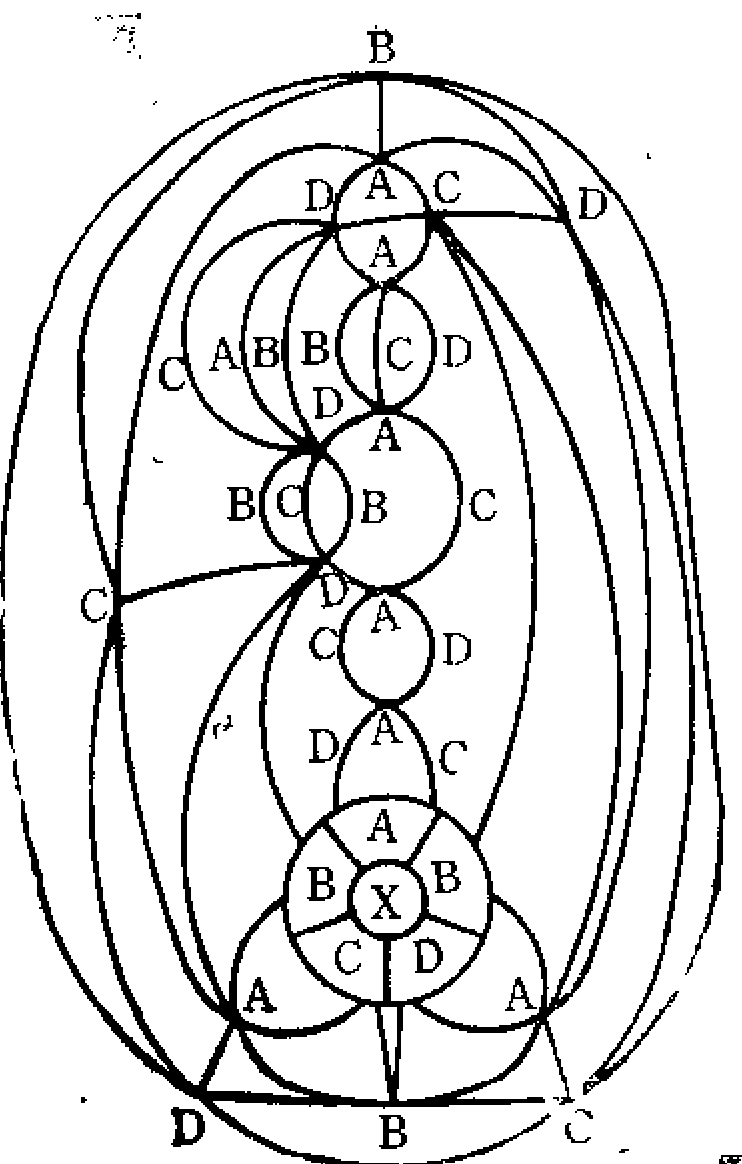
在第二轮图的“桥”○DC中B换A，略去多余线路，即为二阶非交叉粘连四色不可解线路集合图，即二阶图N的复式图。（第二轮图中，“×”为略去的多余线路）

纵观一阶中的二色通道交叉粘连，无论情况如何复杂，经过二阶四色演绎的实际检验，也可以看出：欲得出二阶四色不可解线路集合，其基本结点和基本线路网络与二阶四色不可解线路集合基准图N均相同。在I线内，A—D与A—C“并蒂线”，不管自身怎样交叉粘连仍保持原“并蒂线”。在I线外，A—D与A—C的交叉粘连，同二阶图R_1中L_2与L_3的交叉粘连一样，形成3色3线桥或4线桥。如果在前述二阶图R_2中进行新一轮的演绎，使X的邻区形成另一个双B夹A图形时，则此图就是一个不计方位的二阶图N的复式图R_1。在此附带补明：在二阶图R_1中，除X邻区A（V_1），其他4个邻区均有“并蒂线”的称为二阶图R_1中“并蒂线”充分的图，否则称为二阶图R_1中“并蒂线”不充分的图。二阶图R_1中“并蒂线”不充分的图，完全可以把二阶图R_2包括在其内。

上述一阶图P、一阶图P′在二阶中的四色演绎是在二阶图N的模式中进行的，所得出的是这些图的二阶基准图。之所以未在原○ADX与○ACX交叉粘连以外的其他线路上再出现新的交叉粘连，用意是在演绎中突出重点。至于一阶图P和一阶图P′在二阶四色演绎中的复式图（即二阶图R_2的复式图），除○ADX与○ACX的n次（n≥2）交叉粘连部分及其在二阶中所形成的桥体外，其余部分与二阶图R_1相同，故不再重复。因此，可视二阶图R_2的复式图为二阶图R_2与二阶图R_1的结合，并称之为二阶图R_2R_1。

图162经二阶四色演绎，其第一轮和第二轮的结果分别为（图163）：

①第1轮



②第二轮

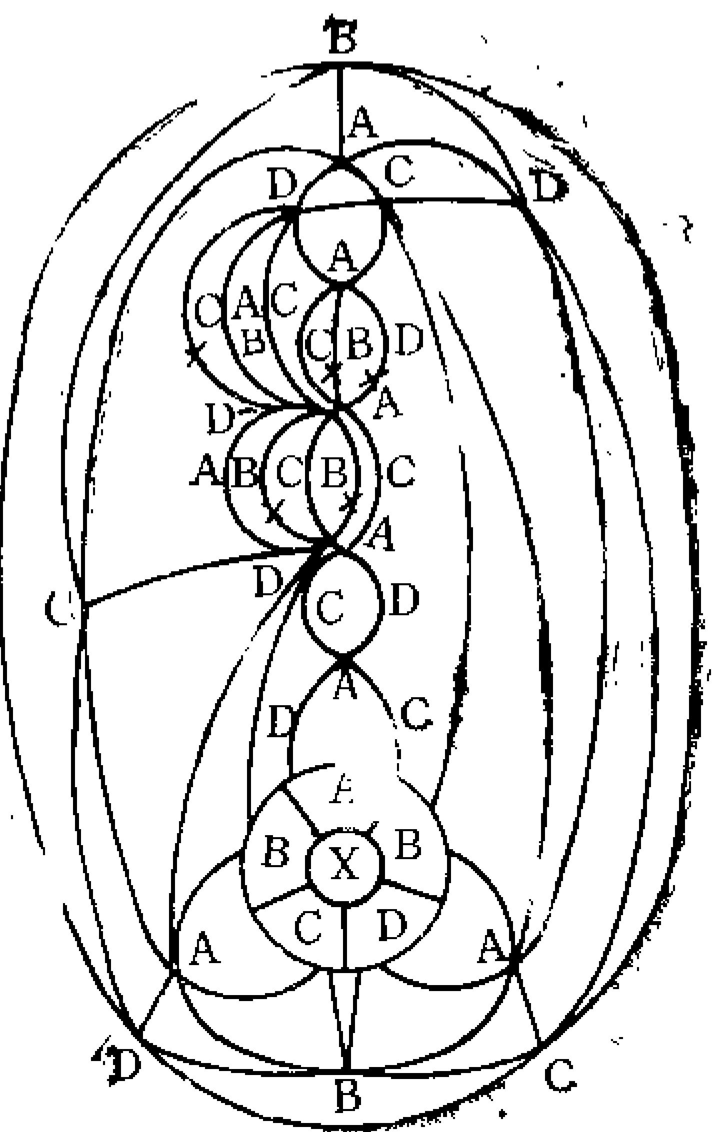


图 163

（六）三阶最后四色可解

在二阶四色演绎中，我们排除了所有的四色可解的线路，找到了二阶四色不可解线路集合基准图N，弄清了由于交叉粘连而形成的复式图的情况，以及所有的复式图最后在二阶模式N中的简化表现形态。我们还探讨了一阶非基准图在二阶中的四色演绎。至此，我们就可以将四色定理的证明问题，提到三阶来解决。也就是说，我们既然已经在二阶排除了所有四色可解的线路，证明四色定理的问题就最后集中到二阶四色不可解线路集合中来了。它已经关进笼子里了，就看能不能抓住它。如果在这个线路集合中能将A、B、C、D四色中的一色填入X区，四色定理就能够成立；如果不能，则四色定理就不能成立。二者必居其一。

在进行三阶四色可解演绎以前，我们再理一理从一阶到三阶图形类别的演化过程：

一阶图M ⟶ 二阶基准图N
　　　　└⟶ 二阶图N的复式图R_1

一阶图M的等价图M′ ⟶ 二阶图N的复式图R_1

一阶图M的复式图P ⟶ 一阶图P的二阶基准图R_2
　　　　　　　　　└⟶ 二阶图R_2的复式图R_2R_1

一阶图P的等价图P′ ⟶ 一阶图P的二阶基准图R_2
　　　　　　　　　└⟶ 二阶图R_2的复式图R_2R_1

因此，在三阶四色可解演绎中，共有4种图形：

①二阶基准图N

②二阶图N的复式图R_1

③一阶图P的二阶基准图R_2

④二阶图R_2的复式图R_2R_1

由于：二阶图R_2R_1＝二阶图R_2＋二阶图R_1，对二阶图R_2R_1，可以不单独立项进行三阶四色可解演绎。

下面，我们开始进行三阶四色可解演绎的证明。

1．对二阶四色不可解线路集合基准图N的三阶四色可解证明

经过一阶和二阶四色演绎的千山万水，千险万阻，珠穆朗玛峰巅已经清晰在望。现在已与始证时的情况大不相同。当时X区的邻区双B夹A型始证图的四外，是令人迷惑的和无法捉摸的四色星空，想到用二色线连接起来已经是方法上的一个大飞跃，但眼前却仍然是隐藏着的、未知的、任意性的、杂乱无章的各种色线的混合交错。现在呢，则是明朗化的、确定性的、线路井然的、邻接有序的、在全方位连锁循序进行可控换色中按排除四色可解要求所形成的二色通道网络。在当初情况下，X区的5个邻区中，两个邻区互换填色，或者V_1V_2互换填色，均无意义，现在二色通道网络确定后，这种互换填色在三阶四色演绎中就可获得“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的效果。让我们再仔细看看二阶四色不可解线路集合基准图N（图164），认真回顾一下堵截四色妖魔企图逃跑所形成的各种复式图吧。

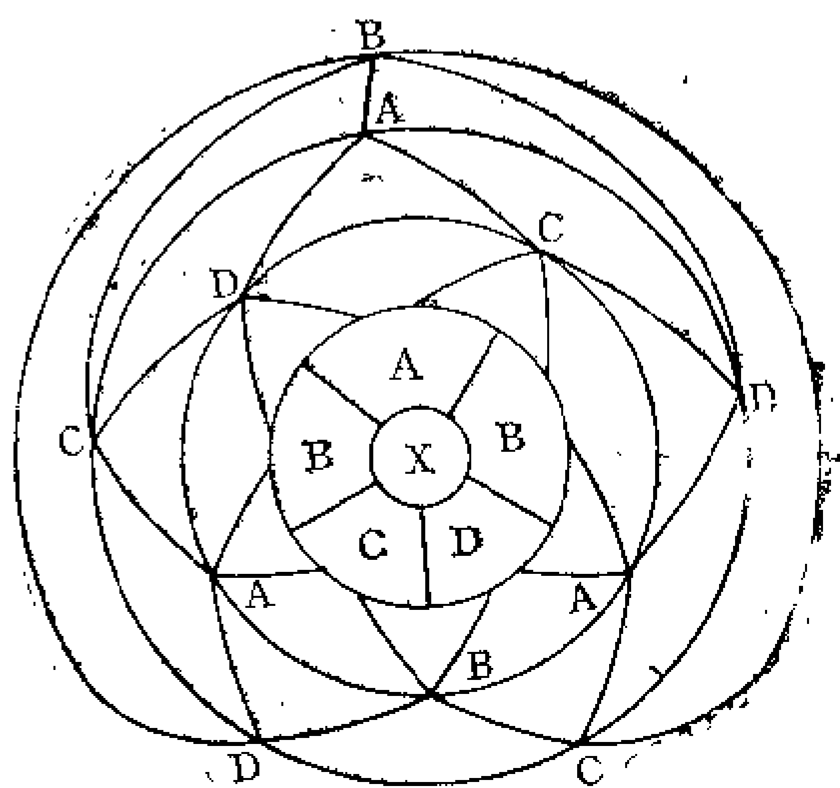


图 164

这样，我们就可以自信地说：锁阵已经排成，运筹已在帷幄，八面埋伏已经就绪，最后攀顶擒拿四色妖魔的时刻终于到来了。

二阶四色演绎有两个最大的贡献：一个是找到了二阶四色不可解线路集合及其基准图N，把四色定理的小鸟关进了鸟笼子里；（妖魔——小鸟——仙子，是证明四色问题的三部曲）；一个是找到了最后证明四色定理的枢纽——○AB二色连锁圈。

在二阶基准图N中，X区的邻区B（V_6）、A（V_1）、B（V_7）与A（v_3）、B（v_4）、A（v_6）形成了贯串○ACX与○ADX交叉“并蒂圈”的连锁圈○AB。试对二阶基准图N进行新一轮演绎，你就会发现：每一步中，○AB都贯串交叉“并蒂圈”并随着交叉“并蒂圈”的连锁循序转换而变化，如同影子随身一样。能否变四色不可解的交叉“并蒂圈”为四色可解的非交叉“并蒂圈”，或形成两个四色可解圈，关键和枢纽就是○AB这个交叉“并蒂圈”的连锁圈。就像开锁那样简单，在○AB中进行C与D二色互换，令人困扰的交叉“并蒂圈”的问题不就解决了吗？

下面，我们就开始进行三阶四色可解的具体演绎。

第一步，在连锁圈○AB中，进行C与D二色互换，分别形成互不交叉的○ADX与○ACX“并蒂圈”（见图165①）。按定理6，定可将四色中的一色填入X区，即：下一步在○ADX中进行B与C二色互换，形成○ACX四色可解圈（有大小两个○ACX四色可解圈），第三步在○ACX中进行B与D二色互换，使X区的5个邻区只有A、C、D三色，将B色填入X区（见图165②）。如在○AB外进行C与D二色互换，将B填入X区的结果相同。这是第一种证明方法，称三阶四色可解证明方法I。

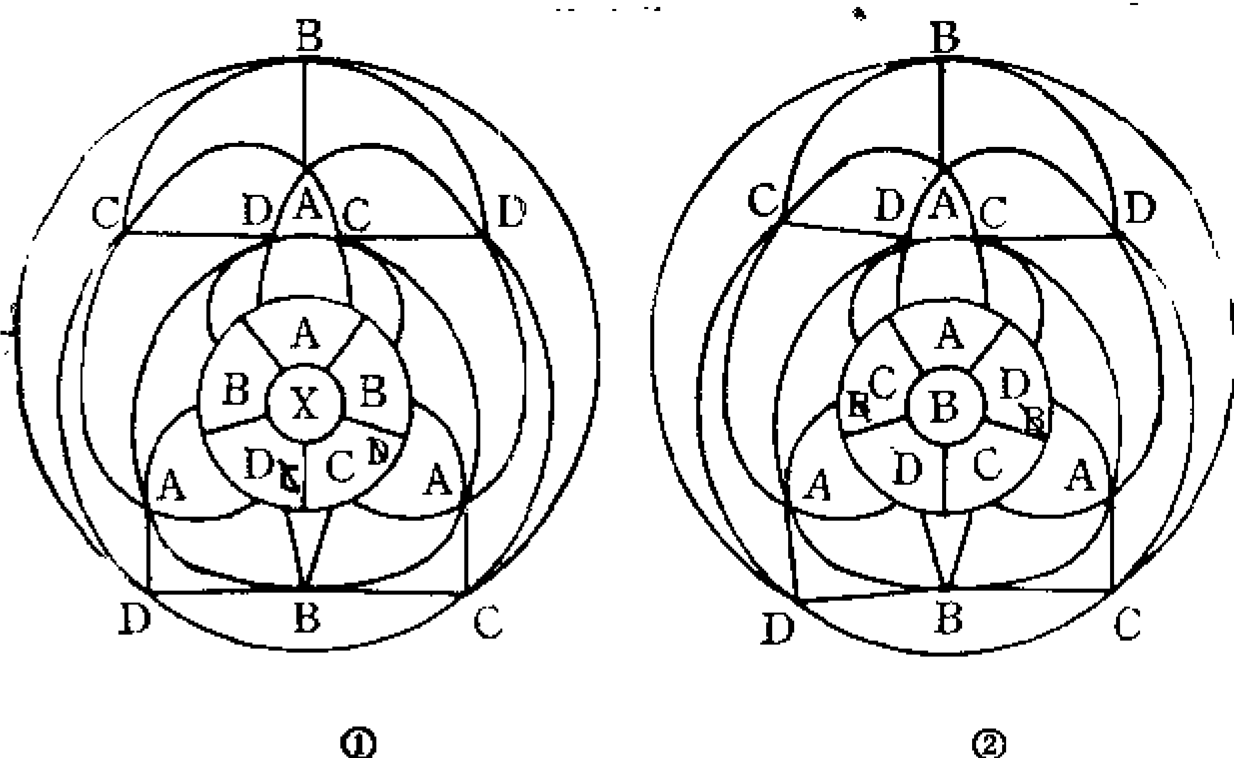


图 165

另一种证明方法称为三阶四色可解证明方法Ⅱ。其具体证明方法是，对二阶四色不可解线路集合基准图N再继续循序进行第二十一步演绎（即新一轮的第一步演绎），得（见图166）：

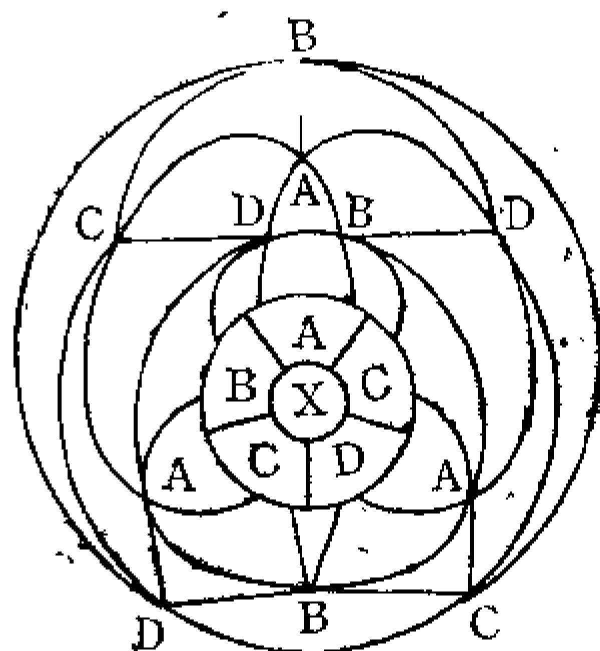


图 166

对上图注意观察，依然存在着○AB，贯串着四色不可解交叉“并蒂圈”○DAX与○DBX，位置有变动，而且本身只包含

X的2个邻区。在○AB中“开锁”，即进行C与D二色互换，组成○ADX和○BDX两个四色可解圈，任何“并蒂圈”都不存在了。见下图（图167）：

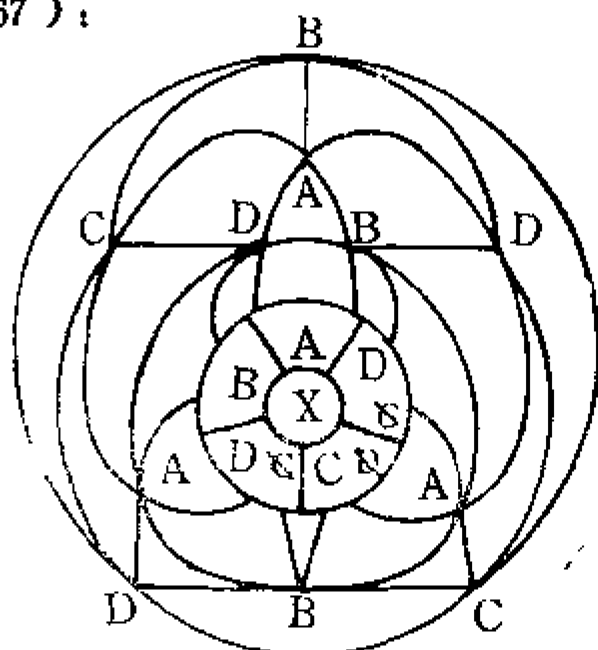
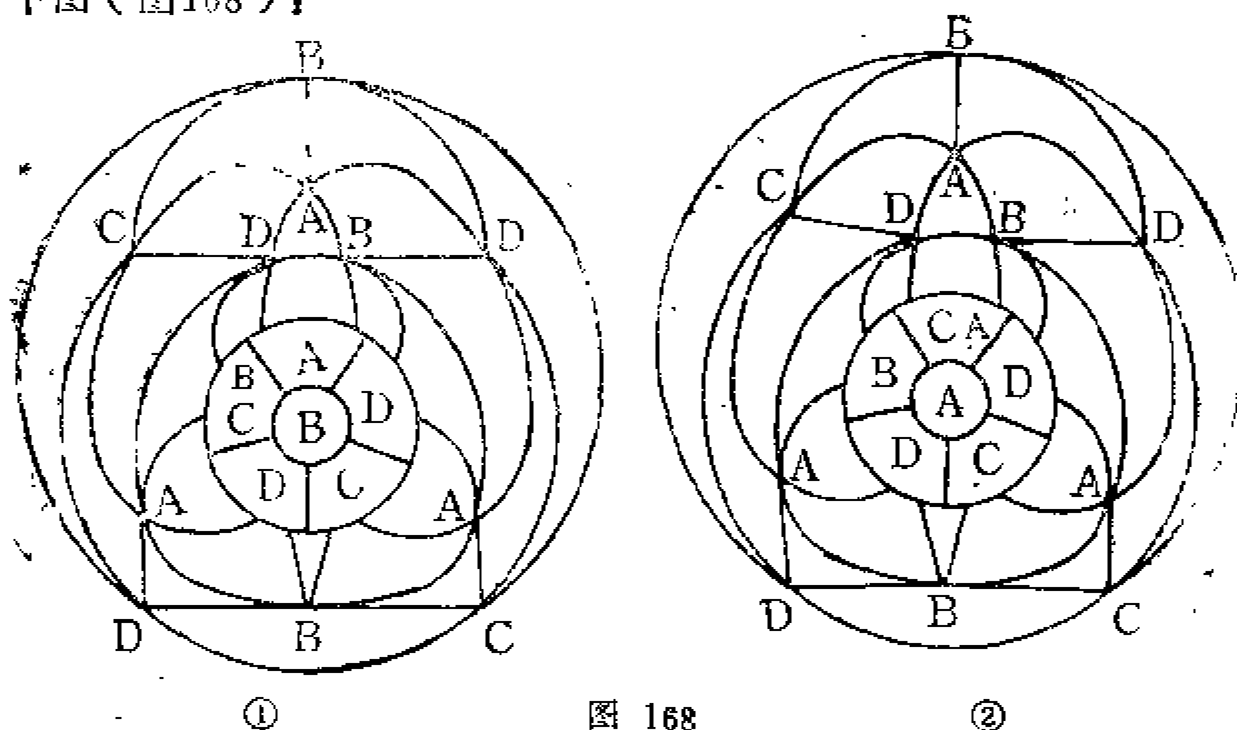


图 167

在图167中，按定理4，可将四色中的一色填入X区。即：在○ADX四色可解圈中B换C，X的5个邻区只有A、D、C三色，定可将B色填入X区；或者在○BDX四色可解圈中A换C，X的5个邻区只有B、D、C三色，定可将A色填入X区。分别见下图（图168）：



① 图 168 ②

以上，在○AB外进行C与D二色互换，同样可以得到证明。

其实，在以后的每一步演绎中，随着交叉“并蒂圈”的转移和连锁圈○AB的变动，都可以交替用上述两种三阶四色可解的证明方法，将四色中的一色填入X区。在已形成的二阶四色不可解线路集合基准图N中，交叉“并蒂圈”的每一步循序连锁转换，现在变成了每一步都是四色可解。

对二阶四色不可解线路集合基准图N（包括非交叉粘连），在三阶已经证明四色可解了。对其异色图和同构图毋需另作证明。如要证明，可用同样方法。

2．对二阶四色不可解线路集合基准图N的复式图R_1的三阶四色可解证明

根据非相邻基本二色通道交叉粘连定理，我们已知非相邻的基本二色通道，在二阶四色演绎过程中所形成的交叉粘连，在二阶四色演绎结束时我们从前面《14、相邻两条二色线段的交叉粘线和I线范围内的成桥定理》中已经知道，在I线范围内（包括I线自身）除了连接X的同一邻区的交叉“并蒂线”外，至少均为4线桥。上述二阶图N的三阶四色可解演绎是可在I线范围内进行的。按4线桥定理，4线桥均可变两条二色通道的交叉粘连为非交叉粘连（有些未形成4线桥是由于在二阶演绎过程中已变为非交叉粘连），其三阶四色可解证明与二阶图N相同。至于连接X同一邻区的交叉“并蒂线”与另一条二色隐线形成3色3线桥（包括3线交叉桥）的图形，在按照二阶图N的三阶四色可解的3步演绎中，其情况为：①除为了形成○AB连锁圈需将A……B隐线改为A—B显线外，在其余含隐线的3色3线桥中，隐线不起作用。②在A……B隐线改为A—B显线的3色3线桥中，原交叉“并蒂线”不起作用。因此，这些含隐线的3色3线桥均不能对三阶四色可解起干扰作用。复式图R_1的别阶四色可解证明，完全与二

阶图N的三阶四色可解的第一种证明方法相同。

下面（图169—图172）是有3线交叉桥（含一条隐线）的二阶图N的复式图R_1在三阶四色可解中的分步演绎图（无论隐性桥线呈怎样的复杂交叉，情况均相同），最后将B色填入X区。

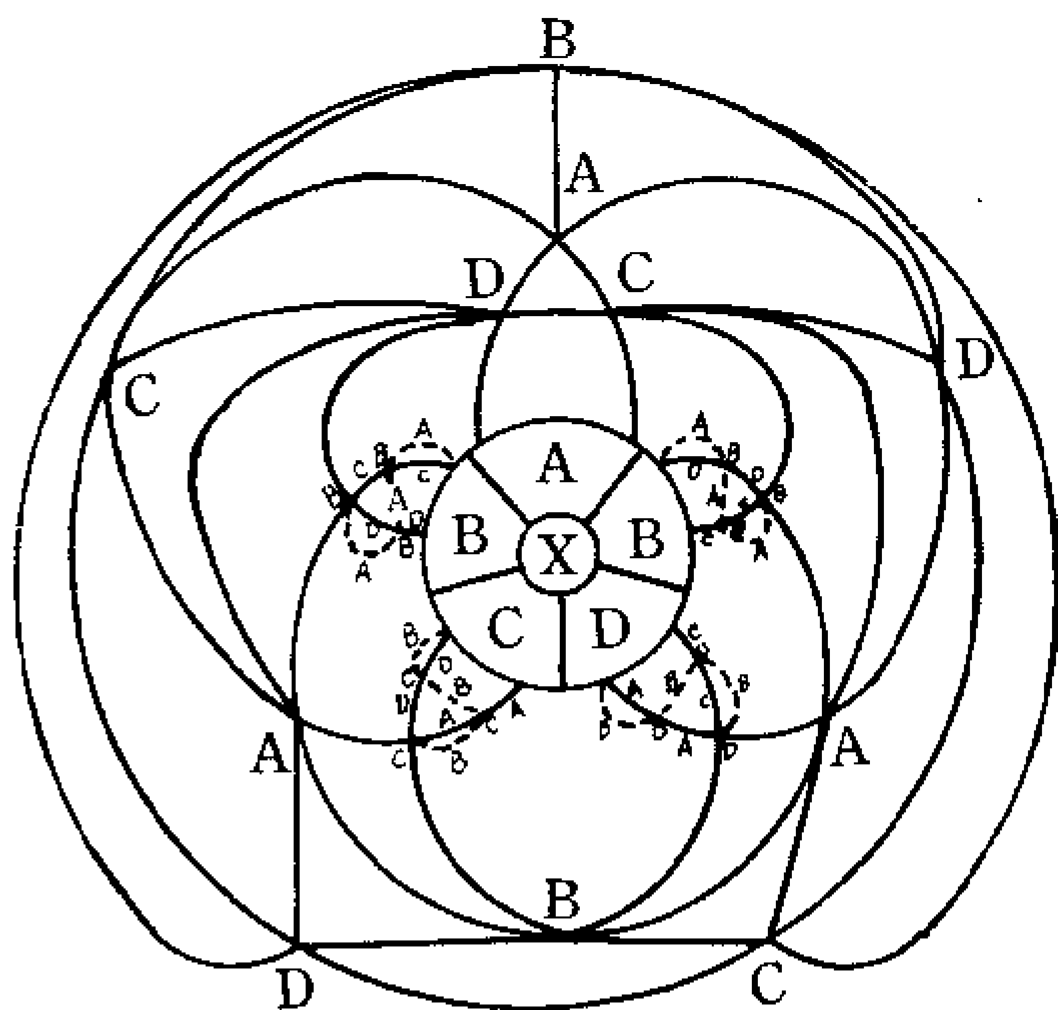


图 169

（待证图）

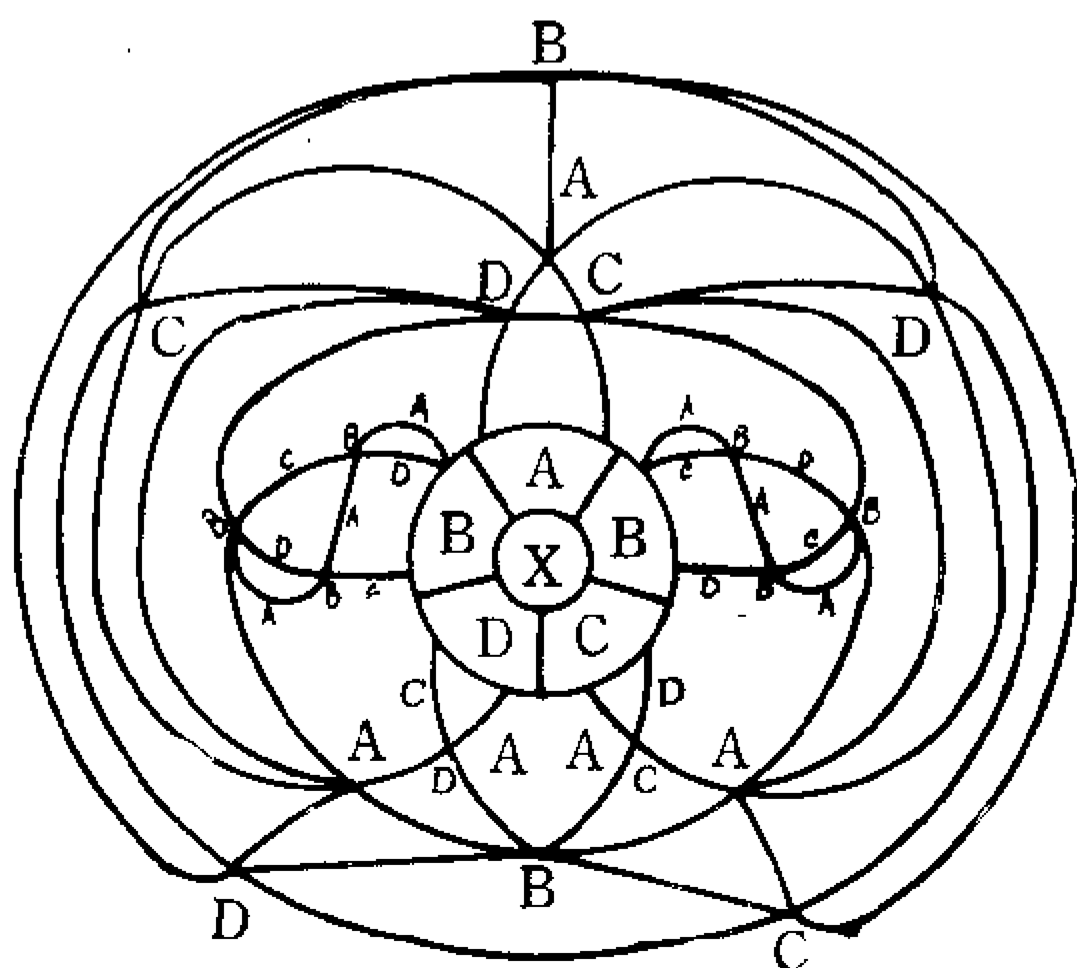


图 170

（第一步，A……B变A—B，在○AB 中进 行C与D二色互换，并略去隐线，形成○ADX与○ACX非交叉“并蒂圈”。）

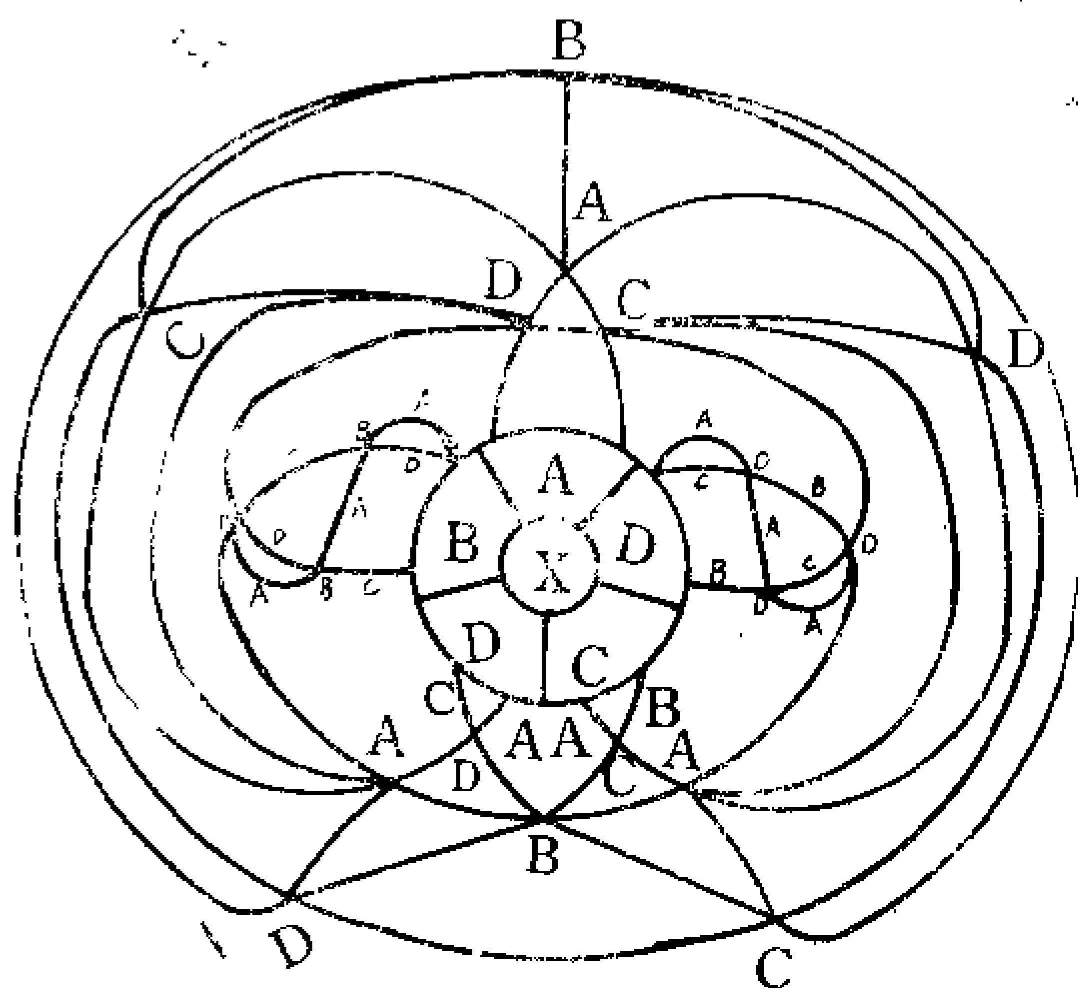


图 171

（第二步，在图右侧○ACX 中进行 B与D二色互换，形成了大小两个○ADX四色可解圈。）

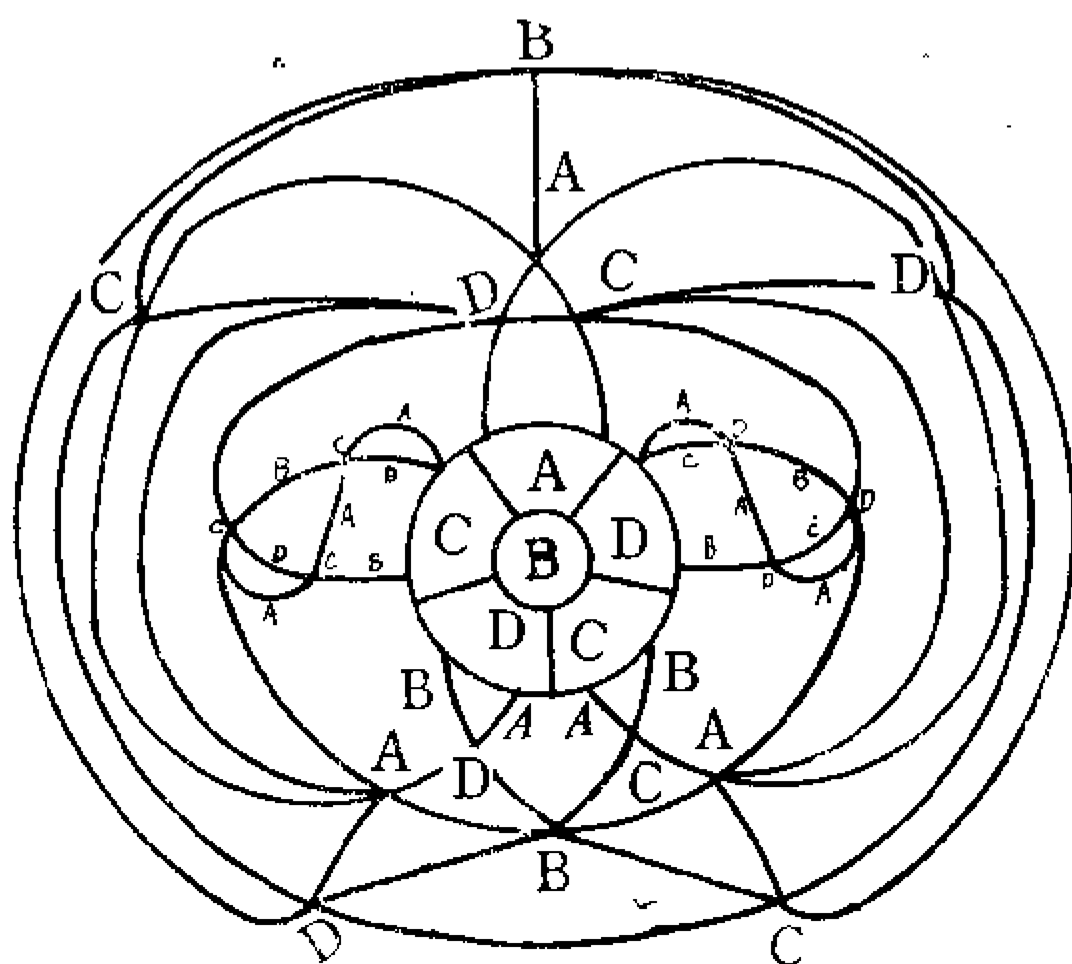


图 172

（第三步，在图左侧小○ADX中进行B与C二色互换，将B色填入X区。）

如果试图提出下面一个图（图173）作反证：

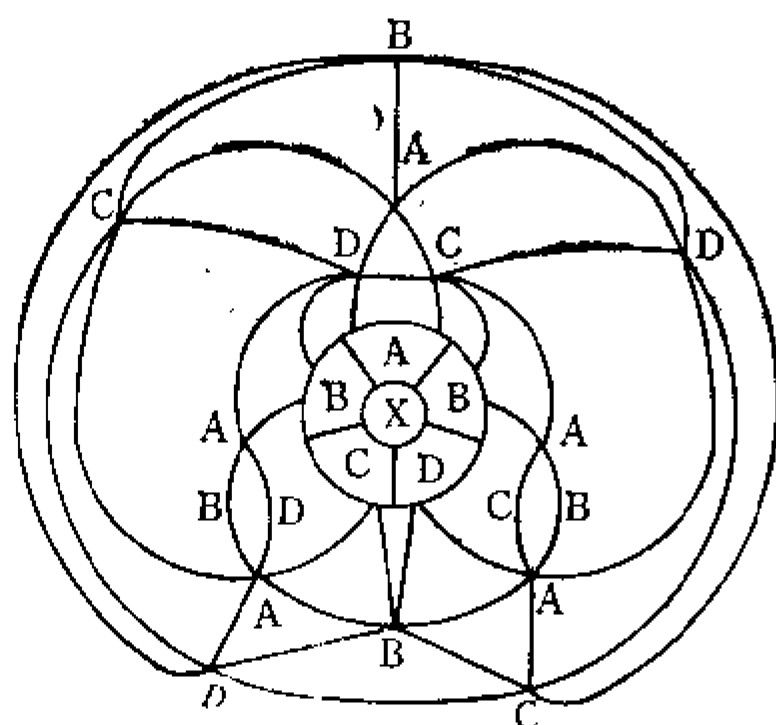


图 173

这是假设图，不是二阶四色不可解线路集合。按此图进行新一轮的演绎，其四色不可解线路集合为图174（按：上图2线桥在演绎过程中如不能拓新桥线，乃为二阶四色可解）：

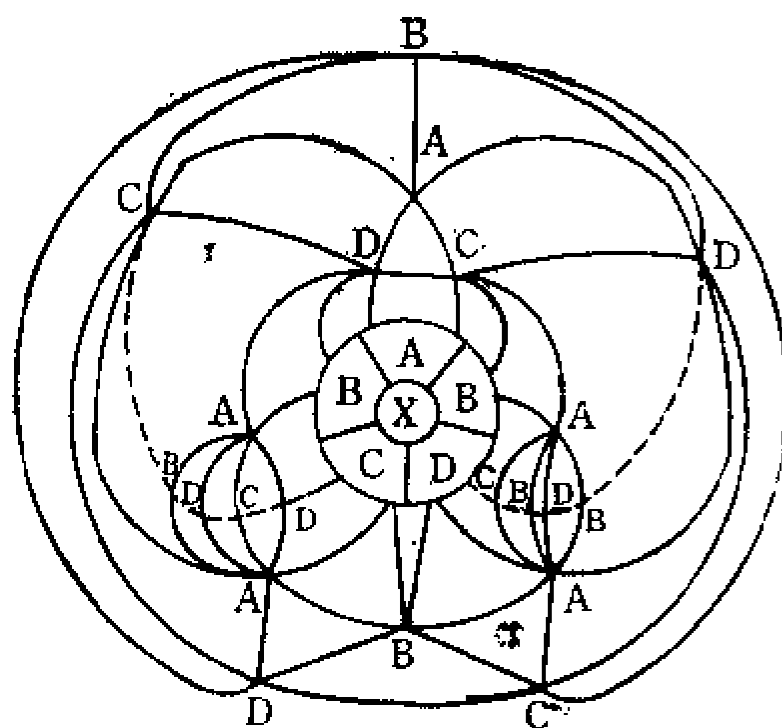
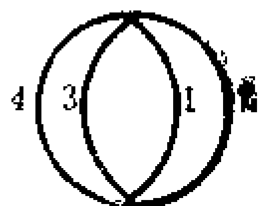
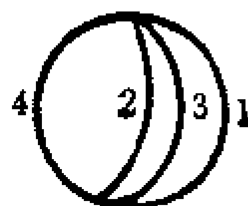


图 174

上图，左桥○AD中C换B，右桥○AB中D换C，略去桥两侧的多余桥线，即呈现非交叉粘连。

注：此图左侧桥线形成顺序为： 右侧桥线形成顺序为：





如果再提出下面的图（图175）作反证.

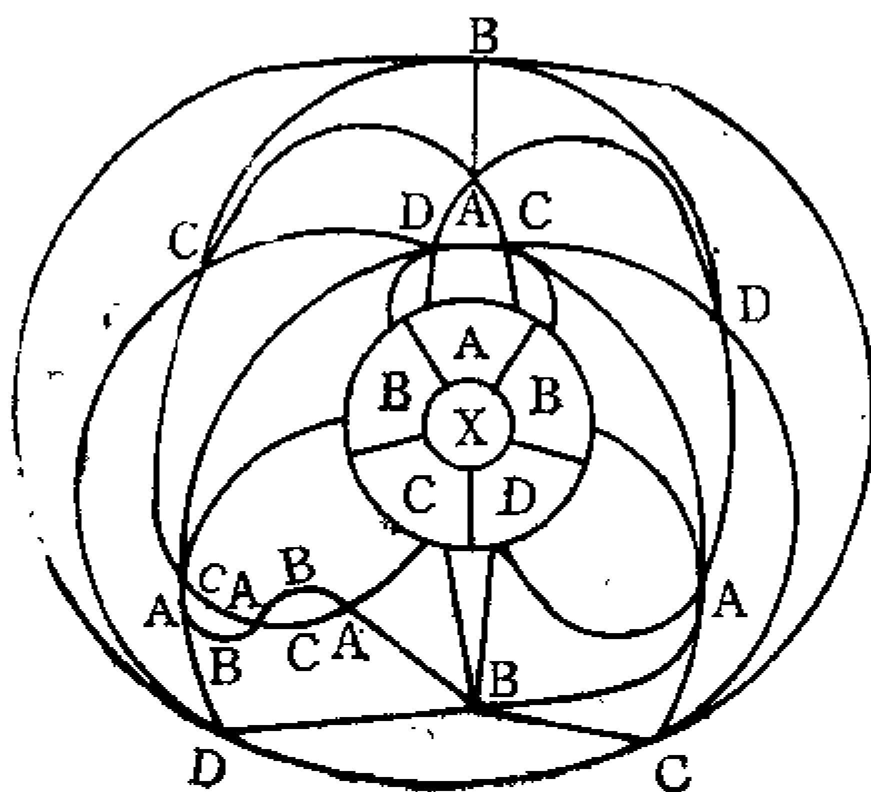


图 175

这也是假设图，不是二阶四色不可解线路集合。按此图进行

新一轮的演绎，其四色不可解线路集合为图176（按：上图2线桥在演绎过程中如不能拓新桥线，乃为二阶四色可解）

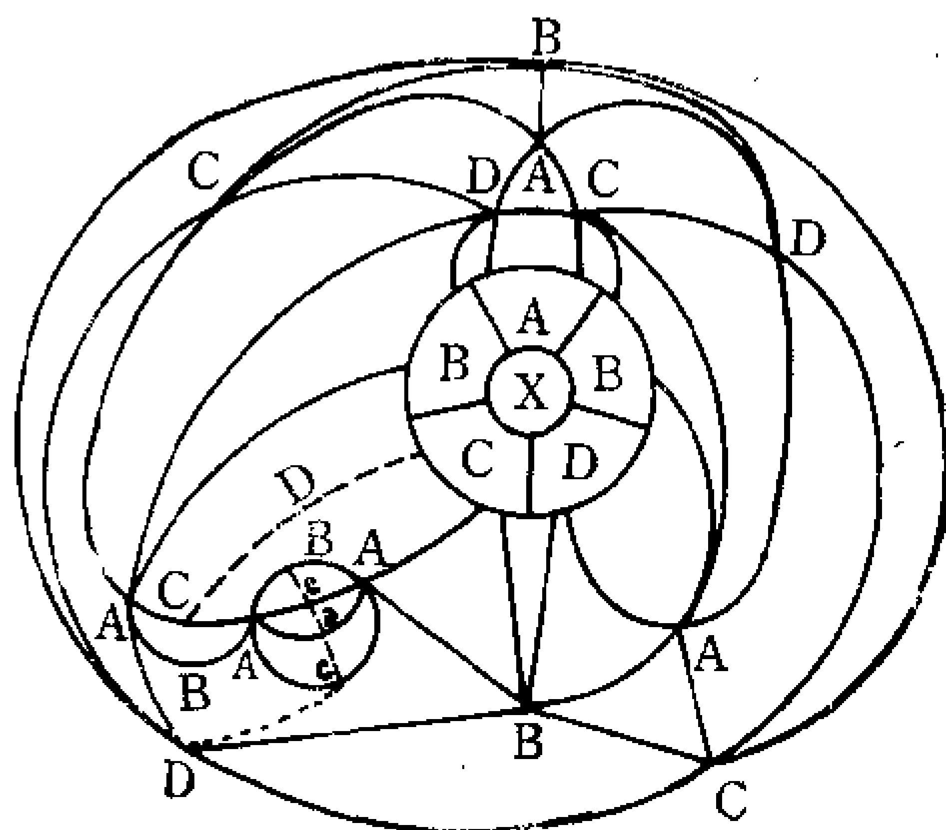


图 176

上图，桥OAC中D换B，略去桥两侧的多余桥线，既呈现非交叉粘连（桥左侧A $\overset{C}{\underset{B}{\bigcirc}}$ A是非交叉粘连，不是桥）。

试再提出下面的图（图177）作反证：

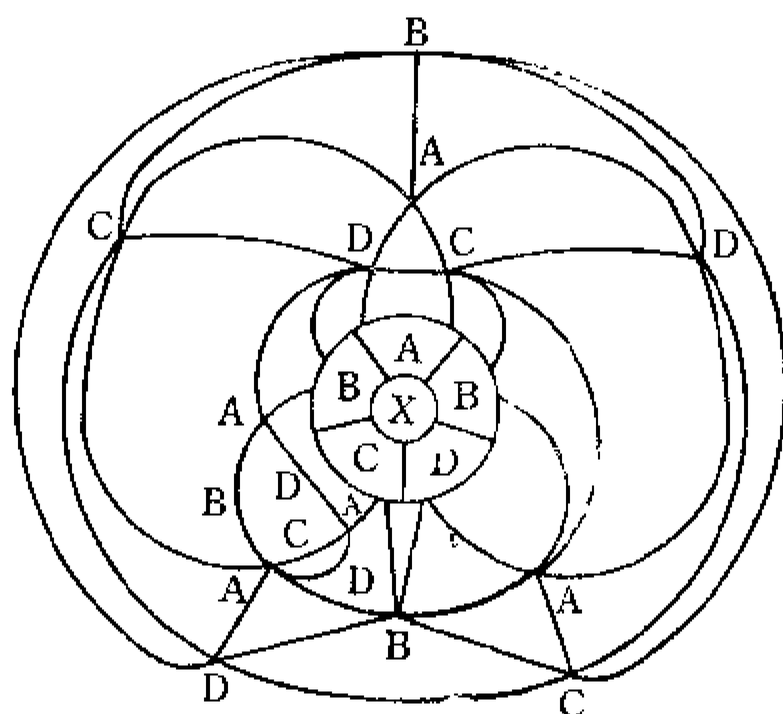


图 177

这同样是一个假设图，而非二阶四色不可解线路集合。试按此图重新演绎，从第十一步始，令C（v_1）拓新线B—C穿过A—B、B—D与B（v_5）交会，至第二十步，其二阶四色不可解线集合为图178（左侧的两个桥为互有共同桥线A—D的两个4线桥）。

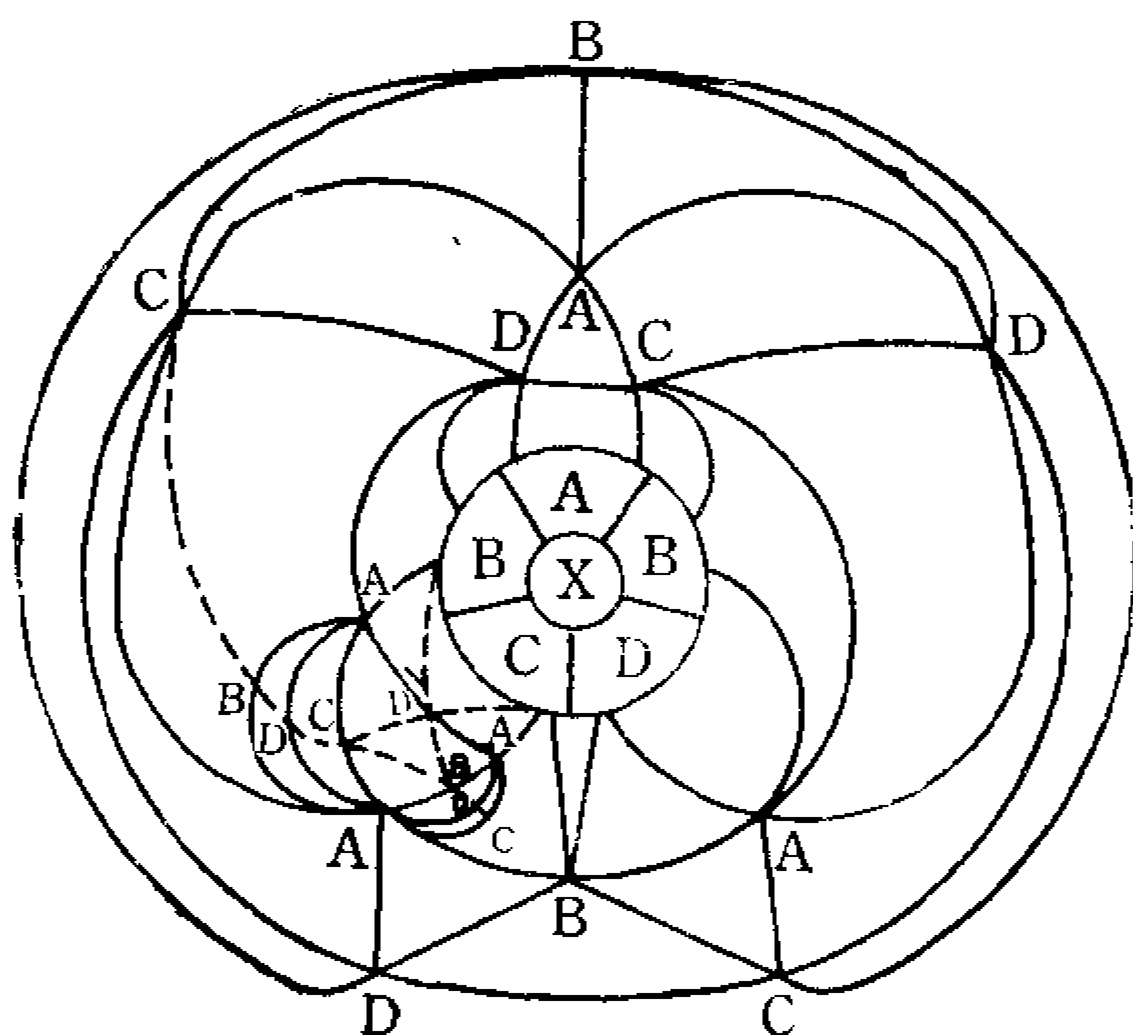


图 178

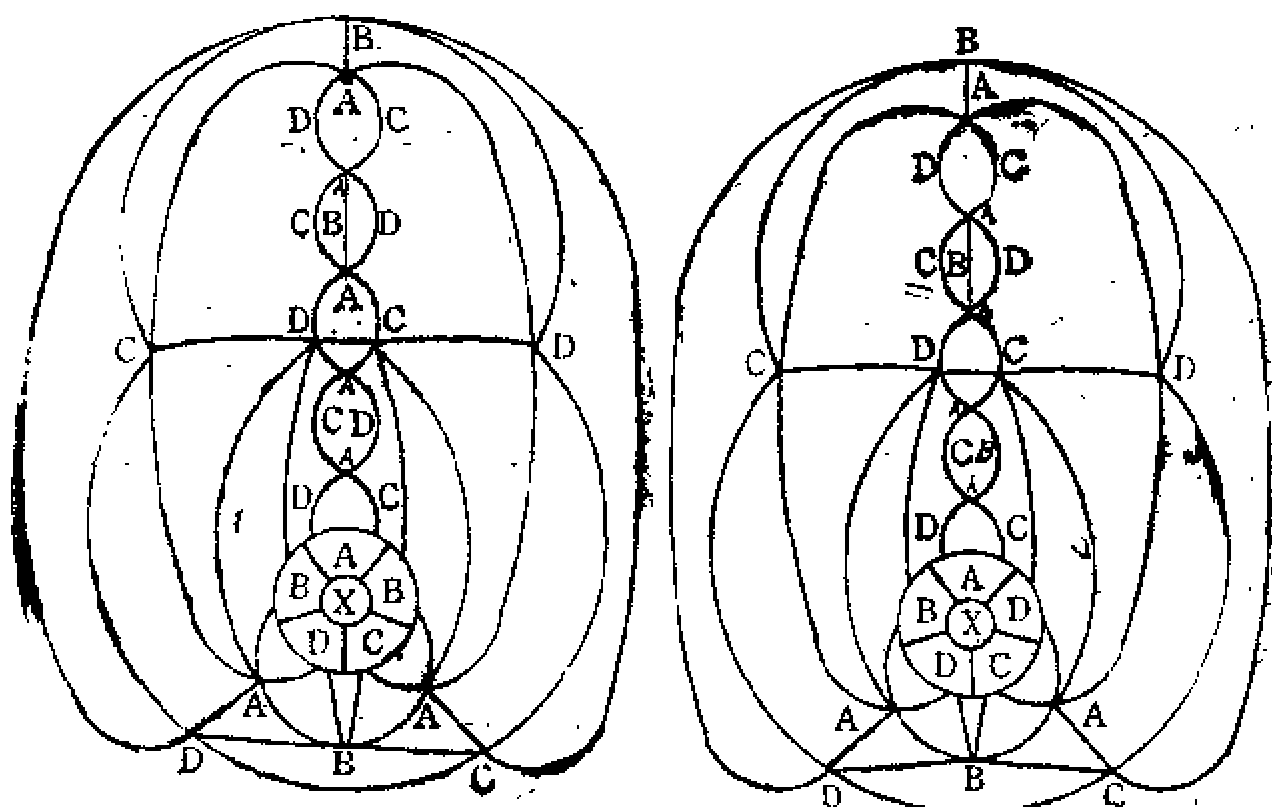
上图，在桥○AD中C与B互换，略去多余桥线即呈现非交叉粘连二阶基准图N。

各种假设图都是不能成立的。在二阶演绎过程中，要么为四色可解，要么经过规范变为二阶四色不可解的基准图及其复式图。因为二阶四色不可解的基准图及其复式图已将所有二阶四色不可解的图形纳入线路集合的体系中。

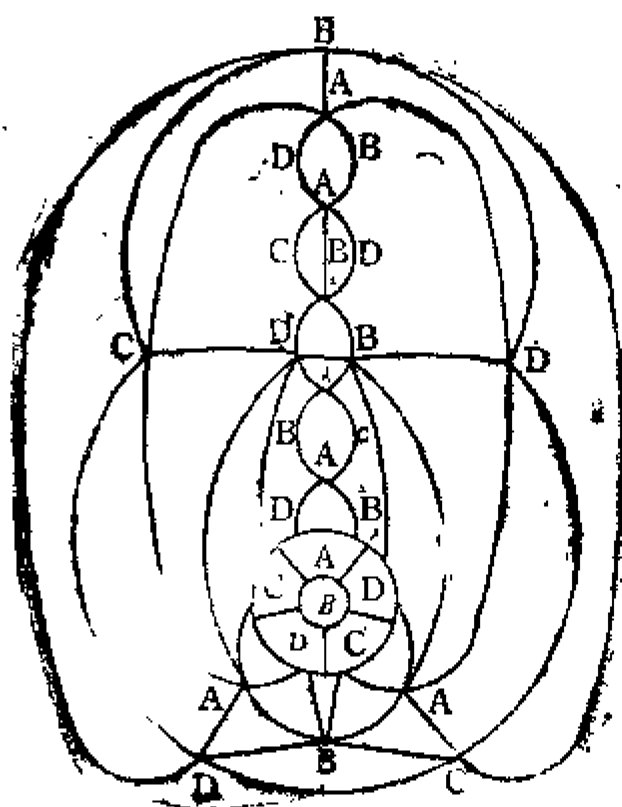
3.对二阶中的一阶复式图R_2的三阶四色可解证明

二阶中的一阶复式图R_2（即一阶图P的二阶基准图R_2），其16个基本结点（包括X的5个邻区）与基本线路均与二阶图N相同，是一种孕于一阶胎中，由一阶演绎引出的和由二阶完成的四色不可解线路集合图形。它与二阶图N、二阶图N的复式图R_1所不

同的是，在I线内可能有连接A（V_1）的交叉“并蒂线”，在I线外可能有由于“并蒂线”在I线外的延伸和因交叉粘连在二阶演绎中所形成的桥。因此，在其三阶四色可解的演绎中，为避免I线内3线交叉桥（“并蒂线”与一条隐线交叉所构成的桥）引起的麻烦，我们只用证明方法I。即：第一步，在○AB中进行C与D的二色互换。第二步在○ACX($V_1v_2v_2V_3$)中进行B与D二色互换，虽没有形成经由$V_1v_1v_6V_4$的小○ADX四色可解圈（抛开了对隐线利用的可能性），但却仍然形成了经由$V_2v_8u_2u_1v_1v_6V_4$的大○ADX四色可解圈。因为第一步和第二步演绎均在I线内进行，I线外不受影响，因此二阶图N和二阶图R_1在三阶四色可解演绎中所形成的大○ADX四色可解圈或者大○ACX四色可解圈在本图的三阶四色可解演绎中同样存在（如第二步在○ADX中进行B与C二色互换，则存在着大○ACX四色可解圈）。第三步，在○ADX四色可解圈中进行B与C二色互换，将B色填入X区。见下图（179）：



①第一步图　　②第二步图



⑤第三步图

图 179

关于二阶图R_2的复式图R_2R_1，它是二阶图R_2与二阶图R_1的组合。其在二阶四色演绎中所形成的复式线路部分，均与二阶图N的复式图R_1相同。由于前面我们已对二阶图N的复式图R_1做了三阶四色可解的演绎证明，现在又做了二阶图R_2的三阶四色可解的演绎证明，已经没有必要再专门做二阶图R_2R_1的三阶四色可解证明。它的证明方法与结果，除了第一步为了形成OAB连锁圈在必要时需将A……B隐线变为A—B显线外（像二阶图R_1在三阶四色可解的第一步演绎那样），与二阶图R_2的三阶四色可解证明相同。

在这里还需补充说明的是：一阶四色不可解线路图M的复式图P，在二阶四色演绎过程中，在二阶图R_1中的“并蒂线”不充分的情况下，可以作为子图“挤”在二阶四色不可解线路集合基准图N的复式图R_1中，图N的复式图R_1中每个交叉“并蒂圈”也可以作为子图分离出去单独“伸展”为一阶四色不可解线

路图M的复式图P。二阶图N的复式图R_1可以把所有的一阶四色不可解复式线路图作为子图纳入自己的线路网络，但不可能在I线范围内使X的5个邻区都连接有二色"并带线"（V_1区没有），因为在一阶四色不可解基准线路图M的基础上，当二阶四色演绎开始进行时就已经"先天"地决定了。因此，尽管一阶四色不可解复式线路可以作为二阶图N的复式图的子图（换了方位的同构图或异色同构图），但作为完整的二阶复式图的四色演绎，仍应将一阶四色不可解复式图P的二阶四色演绎包括在内。特别是在三阶四色可解的演绎中，因证明牵涉到I线内A（V_1）连接的二色"并带线"，不能忽略。

对二阶图N的各种异色图，除可转变为基准图N进行如上的统一性证明外，当然也可以分别直接进行三阶证明。即：

凡在连锁圈内进行可控换色后成为非交叉"并带圈"的（判明的标志，是连锁圈自身有X的3个邻区），分别在两个互不交叉的"并带圈"中进行可控二色互换，使X的邻区共有3种颜色，而将另一色填入X区。

凡在连锁圈内进行可控换色后，形成两个四色可解圈的（判明的标志，是连锁圈的自身有X的2个邻区），则在任何一个四色可解圈中进行可控换色，使X的邻区共有3种填色，而将四色中的另一色填入X区。

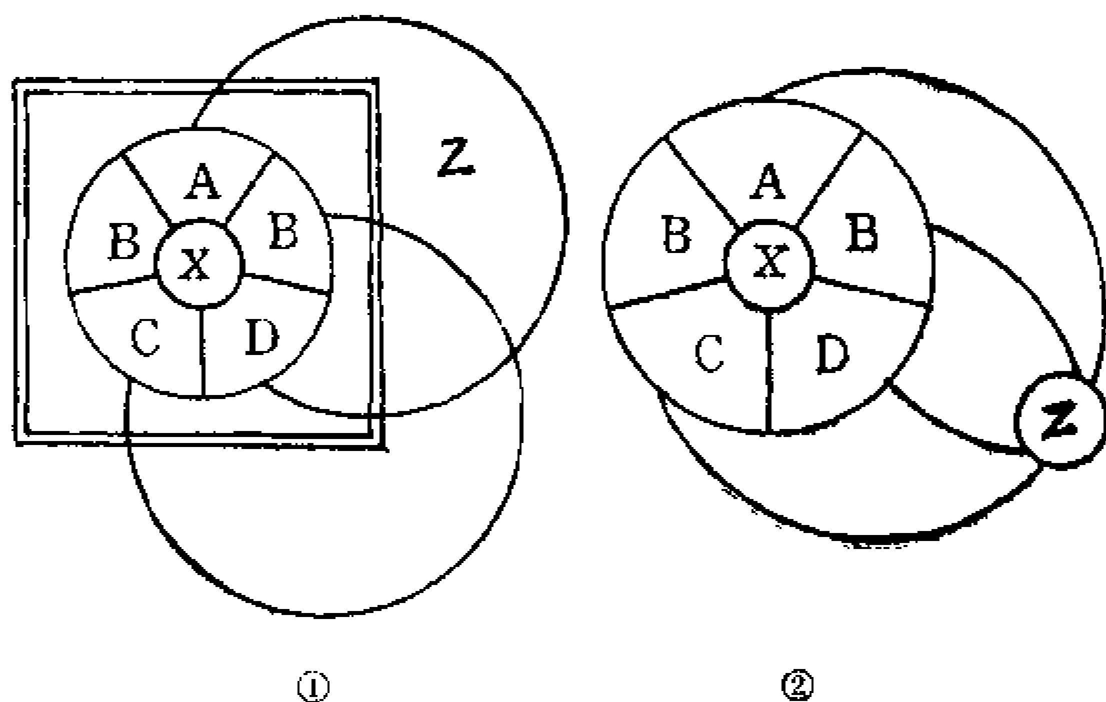
对二阶图R_1和图R_2的异色图，先变交叉粘连为非交叉粘连和略去多余线路，然后按二阶图R_1和图R_2在三阶四色可解的演绎方法证明。当然也可以转变为二阶图R_1和图R_2，纳入以上统一性的证明。

对二阶图N及图R_1、图R_2的各种拓扑同构图（指非N模式的），均转换为N模式，纳入以上证明。

在二阶图N、图R_1和图R_2中证明了四色定理，就必然和不言而喻地在它们的一切异色图和拓扑同构图中证明了四色定理。上面所做的一些说明，似乎近于繁琐和多余了。

（七）关于特别区域Z（平面区域图G中的区域外非着色区）及其他

在实际的平面区域图G中，其四周有外限，其内也可能有非填色地带。我们称图G四周限外的空白地带和其他非填色地带为特别区域Z。在四色演绎中，对这些地带——特别区域Z，可作为四色以外的中性过渡区看待，任何二色通道都可以从Z区通过，并可以形成二色圈，如○ACZX、○ABZ等。无论二圈、四圈或三圈可控换色演绎，如果某条二色通道遇着特别区域Z，而又无其他路线可供选择时，均形不成四色不可解线路集合。因为特别区域Z可以允许相对立的两条色线（如A—C与B—D）通过，演绎至此可使该图直接成为四色可解图形。如下面的示意图（图180），A—D二色通道既可形成○AZDX四色不可解圈，B—C二色通道又可形成○BZCX四色可解圈，从而如在○BZCX中进行D与A二色互换，即可将D色填入X区。



① ②

图 180

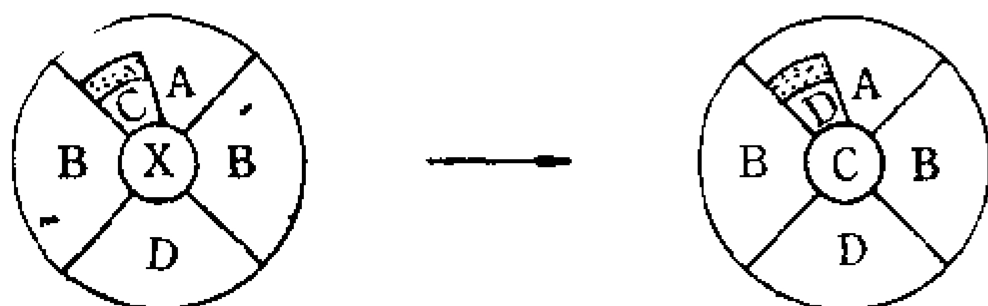
此外，对始发图B还需补充说明的是：

（1）在四色演绎图C中，如果相邻的两个X区的邻区中包含着n个四色区（如图181，其中▒为n个四色区），当改变这两个邻区之一的填色时，虽然引起这n个四色区中相关区的填色变化，但不会影响另一个邻区的填色；当这两个邻区的填色互换时，其中包含着的n个四色区凡填这两种颜色的也互换填色。因此，对相邻的两个X区的邻区中所包含的n个四色区，在四色演绎图C中可略去不计，只统一在始发图B的基础上进行四色演绎即可。

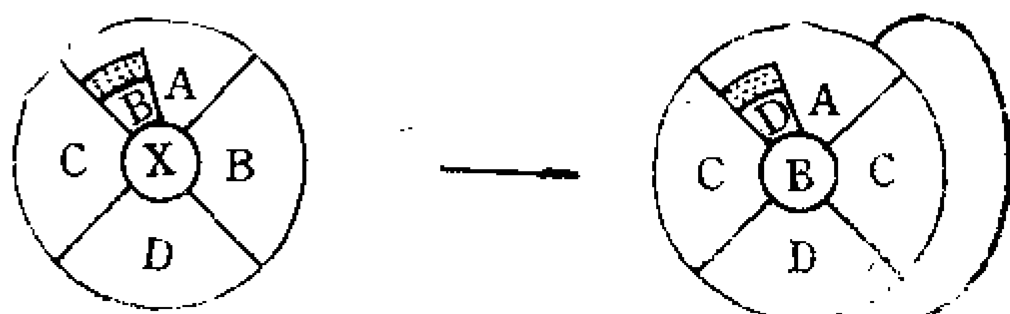


图181

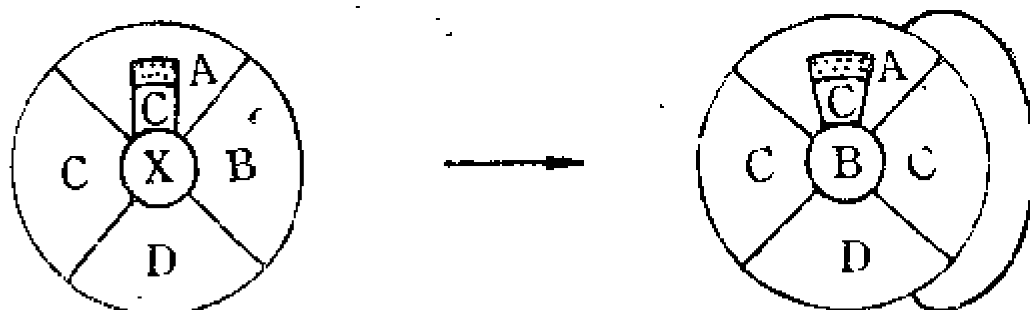
（2）X区有5个邻区，如果X的一个邻区（或者再上其他一些四色区）被其两侧的两个X的邻区封闭，或被一个X的邻区封闭，则四色可解容易证明，其证明方法基本上与证明X区有4个邻区的四色可解相同。即：首先抛开被封闭区，将与X区相邻的4个非封闭区由四色变为三色（这是完全可以做到的，前面已经证明），然后，如有必要，再在由非封闭区同X区所形成的圈中（二色圈或一色圈）改变被封闭区的填色，使之成为4个封闭区所填三色中的一色。这样，X区的5个邻区一定可以只填有三色，而将四色中的另一色中填入X区。因此，我们不将这类图纳入始证图B和四色演绎图C中，而只作为特殊图计入一阶四色可解。下面（图182）是对这类图的演绎说明：



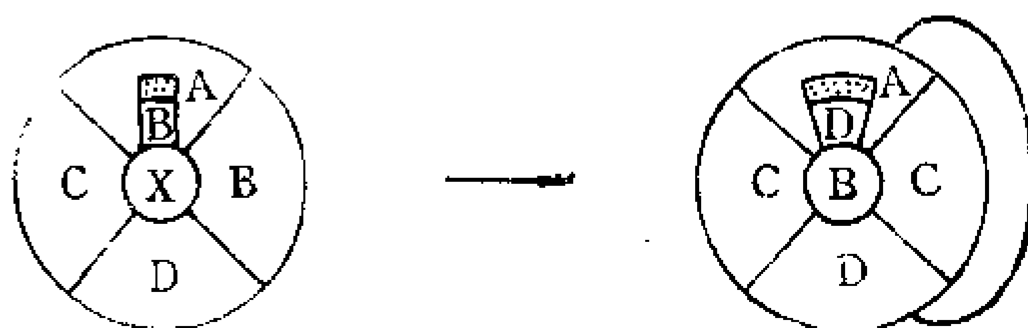
①在○ABX中可控换色



②在○ADX和○ACX中可控换色



③在○ADX中可控换色



④在○ADX和○ACX中可控换色

图 182

倘上图②③④形不成○ADX，则必存在○BCX，只需将D区改填A色即可，而将D色填入X区。

至于X区有4个邻区的这类图形，如分别填有四色，则只需在封闭区与X区所形成的圈中进行二色互换，即可将四色中的一色填入X区。

六、结论：$F=n-1$为四色图时，$F=n$四色定理成立，进而$F>n$四色定理均成立

综前所述，在任何一个平面区域图G中，必有一个区域X至多只能同5个区域相邻。对X区有4个邻区或少于4个邻区的，四色够用。对X区有5个邻区的，一阶四色可解＋二阶四色可解＋三阶四色可解＝全部可解，四色也够用。即，在任何情况下都可将四色中的一色填入X区。

这样，就证明了：$F=n-1$为四色图时，$F=n$四色定理成立。

$F=n$时，四色定理成立，用同样的方法可以证明$F=n+1$时四色定理亦成立。以此类推，$F\geqslant n$四色定理均成立。

这就是说，在任何一个平面区域图G中，四色定理成立，可将四色中的一色填进所有的区域，而不使任何相邻的区域填有相同的颜色。

先借助欧拉定理的运算，然后用数学归纳法和锁阵运筹——全方位连锁可控调整工程，在拓扑形式中对四色定理的演绎证明，到此结束。

经过了十余年在四色星空中的探索和游历，走尽了数不清的“冤枉路”，在多少次“柳暗花明”和“山重水复”的交替中，这两年又战胜了用穷举法不能穷其尽，用例举法不能揭其理的戏弄，我总算擒住了“四色问题”这个妖魔安全地回到了地球上。

被擒住了的四色妖魔，现在应该变成四色仙子了吧！你是否还要再挣扎呢？